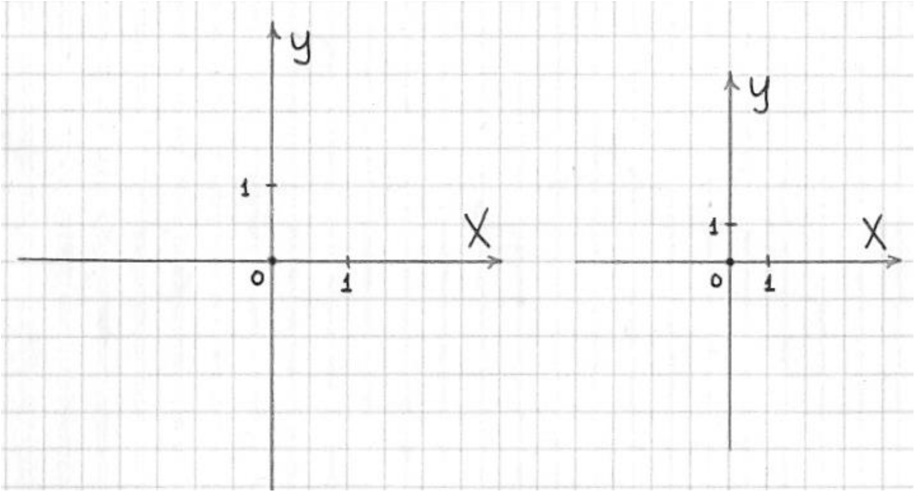
Как быстро построить графики основных функций?

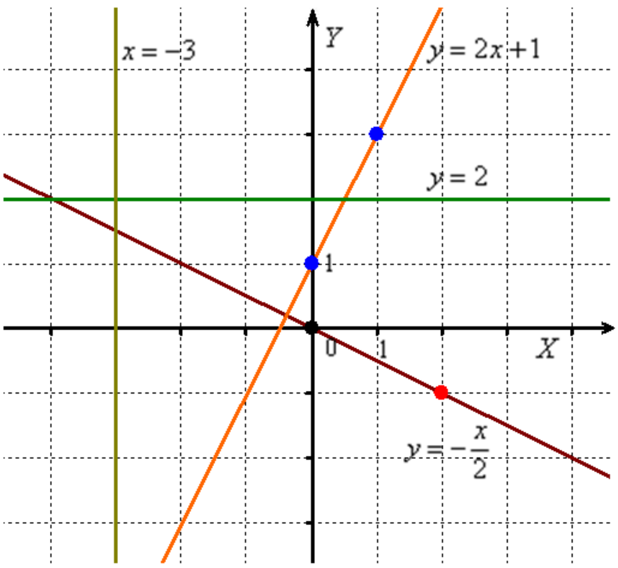
0. Сначала строим ***прямоугольную (декартову) систему координат***, во многих случаях подойдёт масштаб *1 ед. = 2 клеточки* либо *1 ед. = 1 клеточка*:



НЕ НУЖНО использовать «сплошную» нумерацию по осям: **…-4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …**

Предполагаемые размеры чертежа лучше оценить ДО построения чертежа. Так, если в задании требуется поставить точку $A(-7;-15)$, то лучше выбрать более мелкий масштаб. И на всякий пожарный: 1-я координата – это «иксовая» координата (по *оси абсцисс* OX), а 2-я координата – это «игрековая» координата (по *оси ординат* OY).

1. ***Прямая*** задаётся функцией $y = kx + b$ и для её построения достаточно знать 2 точки. Так, для прямой $y = 2x + 1$ удобно выбрать значение $x = 0$ и вычислить $y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ и, например, для $x = 1$ вычислить $y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$:



1.1. *Прямая вида* $y = kx$ проходит через начало координат и для её построения нужно найти одну точку; так для прямой $y = -\frac{x}{2}$ удобно выбрать $x = 2 \Rightarrow y = -1$

1.2. *Прямая вида* $y = b$ параллельна оси OX и проходит через точку $(0; b)$, в частности уравнение $y = 0$ задаёт ось OX

1.3. *Прямая вида* $x = a$ параллельна оси OY и проходит через точку $(a; 0)$, в частности уравнение $x = 0$ задаёт ось OY

Уравнение прямой часто встречается в *общем виде*: $Ax + By + C = 0$, из которого легко получить функцию $y = kx + b$, если $B \neq 0$:

$$By = -Ax - C \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

2. ***Парабола*** задаётся функцией $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$, то вниз. Простейший случай $y = x^2$:

2.1. Как быстро построить любую параболу? Например, $y = -2x^2 + 4x + 1$.

Сначала находим вершину, для этого берём производную и приравниваем её к нулю:
$y' = (-2x^2 + 4x + 1)' = -4x + 4 = 0$ – найдём корень уравнения: $x = 1$ – тут и вершина, её «игрек»: $y = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 = -2 + 4 + 1 = 3$

Найдём опорные точки (обычно хватает четырёх), при этом используем симметрию параболы и принцип «влево-вправо»:
$x = 0 \Rightarrow y = -0 + 0 + 1 = 1$
$x = 2 \Rightarrow y = -2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 = -8 + 8 + 1 = 1$
Внимание! Для проверки рассчитываем и то, и то значение, они должны совпасть!
$x = -1 \Rightarrow y = -2(-1)^2 + 4(-1) + 1 = -2 - 4 + 1 = -5$
$x = 3 \Rightarrow y = -2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1 = -18 + 12 + 1 = -5$

Перечисленные действия обычно выполняются устно или на черновике, а результаты заносятся в табличку:

x	1	0	2	-1	3
y	3	1	1	-5	-5

Осталось отметить найденные точки на чертеже и АККУРАТНО соединить их линией

3. График функции $y = \sqrt{x}$ представляет собой ***ветвь параболы***, которая «лежит на боку»:

Данная функция определена лишь на промежутке $x \in [0; +\infty)$, т.к. из отрицательных чисел нельзя извлечь квадратный корень.

– как нельзя и из любого корня чётной степени. А вот нечётные корни извлекаются, например: $\sqrt[3]{-8} = -2$.

4. График функции $y = x^3$ называется ***кубической параболой*** и выглядит так:

и она же – «лежащая на боку»: $y = \sqrt[3]{x}$

5. График функции $y = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$ представляет собой ***гиперболу***. Если $a > 0$, то ветви гиперболы лежат в 1-й *(правой верхней)* и 3-й координатных четвертях, если $a < 0$, то во 2-й *(левой верхней)* и 4-й.
Данная функция не определена в точке $x = 0$, а координатные оси являются асимптотами графика – **«залезать на них» нельзя!**

5.1. Как быстро построить график? (и не только гиперболы)

Во многих случаях удобно поточечное построение, построим, например, правую ветвь гиперболы $y = \frac{6}{x-1}$.

Эта функция не определена в точке $x = 1$, и поэтому *вертикальная асимптота* будет именно здесь.

Найдём несколько опорных точек (подбирая удобные значения «икс»):

x	2	3	4	7
y	6	3	2	1

отмечаем эти точки на чертеже и аккуратно соединяем их линией.

5.2. Принципиально такую же форму имеют графики $y = \frac{a}{\sqrt{x}}$, $y = \frac{a}{x^2}$, $y = \frac{a}{x^3}$ и т.п.

6. Уравнение $x^2 + y^2 = r^2$ задаёт ***окружность*** *радиуса* r с центром в начале координат, при этом функция $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ определяет нижнюю полуокружность, а $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ – верхнюю. Например, для окружности $x^2 + y^2 = 4$:

При выполнении чертежа от руки желательно использовать циркуль. И желательно **не отрывать иглу от бумаги!** – пока не прочертите всю окружность или нужную дугу.

6.1. Окружность не следует путать с ***кругом***. Круг – это фигура, ограниченная окружностью, и задаётся он неравенством $x^2 + y^2 \leq r^2$. Этому неравенству удовлетворяют все точки, лежащие внутри круга или на его границе (на окружности).

7. ***График показательной функции*** $y = a^x$ рассмотрим на примере *экспоненты* $y = e^x$, вспоминаем приближенное значение этой константы: $e \approx 2{,}718$.
Экспоненциальная функция выглядит так:

Для построения её графика удобно найти несколько опорных точек:

x	-2	-1	0	1
y	$e^{-2} \approx 0{,}14$	$e^{-1} \approx 0{,}37$	1	$e \approx 2{,}72$

при этом ось OX является *горизонтальной асимптотой*.

Принципиально так же выглядят графики других показательных функций $y = a^x$ с основанием $a > 1$, например, $y = 2^x$, $y = 3^x$ и др.

7.1. График функции $y = e^{-x}$ симметричен графику $y = e^x$ относительно оси OY.
И принципиально так же выглядит график любой показательной функции $y = a^x$ с основанием $0 < a < 1$.

Пояснение: $y = e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$, *т.е. основание этой функции равно* $\frac{1}{e} \approx 0{,}37$.

8. ***График логарифмической функции*** рассмотрим на примере *натурального логарифма* $y = \ln x$. Это обратная к $y = e^x$ функция, которая определена на интервале $(0; +\infty)$ и имеет *вертикальную асимптоту* $x = 0$ (ось OY):

x	e^{-2}	e^{-1}	1	e
y	-2	-1	0	1

Принципиально так же выглядит график любого логарифма $y = \log_a x$ с основанием $a > 1$, в частности, *десятичный логарифм* $y = \lg x$ $(a = 10)$

8.1. Если $0 < a < 1$, то графики логарифмов оказываются «развёрнутыми наоборот» относительно оси OX, например, $y = \log_{1/2} x$. Но такие логарифмы в высшей математике практически не встречаются.

8.2. График произвольного логарифма, например, $y = -\ln(1 - 2x)$ удобно строить по следующей схеме. Сначала из уравнения $1 - 2x = 0$ находим вертикальную асимптоту $x = \frac{1}{2}$ и затем несколько опорных точек, которые аккуратно соединяем линией:

x	-3	-2	-1	0	0,25
y	$-\ln 7 \approx -1{,}95$	$-\ln 5 \approx -1{,}61$	$-\ln 3 \approx -1{,}10$	0	$y = -\ln 0{,}5 \approx 0{,}69$

9. Графики тригонометрических функций.

9.1. График синуса $y = \sin x$ называется ***синусоидой***, вспоминаем, что $\pi \approx 3{,}14$:

Для её построения можно найти дополнительные точки (например, с помощью *Тригонометрической таблицы*), в частности, полезно иметь в виду значение $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.
И, конечно, пользуемся симметрией графика.

9.2. График $y = \cos x$ представляет собой синусоиду, сдвинутую на $\frac{\pi}{2}$ влево:

9.3. График тангенса $y = tgx$:

Данная функция не определена в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ (k – любое целое число) и имеет там *вертикальные асимптоты*. Удобные опорные точки: $tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1,\ tg\frac{\pi}{4} = 1$.

9.4. График котангенса $y = ctgx$:

Данная функция не определена в точках $x = \pi k$ (k – любое целое число) и имеет там *вертикальные асимптоты*. Удобные опорные точки: $ctg\frac{\pi}{4} = 1,\ ctg\frac{3\pi}{4} = -1$.

10. Графики обратных тригонометрических функций.

10.1. Арксинус $y = \arcsin x$ определён на отрезке $x \in [-1; 1]$ и может принимать значения от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$:

10.2. Арккосинус $y = \arccos x$ определён там же, но принимает значения от 0 до π:

10.3. График арктангенса $y = \mathrm{arctg} x$ ограничен асимптотами $y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$:

10.4. График арккотангенса $y = \mathrm{arcctg} x$ ограничен асимптотами $y = \pi$ и $y = 0$:

Внимание! Арк**ко**тангенс часто машинально «принимают» за арктангенс, поэтому **не «обознавайтесь» – всматривайтесь, какая функция вам дана!**

С дополнительной информацией можно ознакомиться здесь:
http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html
и особо рекомендую материал:
http://mathprofi.ru/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii.html