mathprofi.ru

Высшая математика – просто и доступно!

Блиц-курс
«Дифференциальные уравнения»

*Данный курс позволяет буквально за день-два научиться решать наиболее распространённые типы дифференциальных уравнений. Методичка предназначена **для студентов заочных отделений**, а также **для всех читателей, которые** недавно приступили к изучению темы и хотят в кратчайшие сроки освоить практику.*

***Внимание!* Это демонстрационная версия книги!**

Автор: Александр Емелин

Оглавление

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Эти два слова (ДУ) или, как их сокращают – диффуры, обычно приводят в ужас среднестатистического обывателя. Более того, дифференциальные уравнения кажутся чем-то запредельным и трудным в освоении и многим студентам: *уууууу… дифференциальные уравнения, как бы мне всё это пережить?!*

Но я не буду «кормить» вас этими мифами и запугивать (как в той сказке), а наоборот – только развеселю! **Потому что на самом деле**

Дифференциальные уравнения – это ПРОСТО и очень увлекательно.
Добро пожаловать в мою сказку!

Сначала вспомним обычные уравнения. Они содержат переменные и числа. Простейший пример: $3x = 12$. **Что значит решить** обычное уравнение? Это значит, найди **множество чисел**, которые удовлетворяют данному уравнению. Легко сообразить, что детское уравнение $3x = 12$ имеет единственный корень $x = 4$. Выполним проверку, подставив найденный корень в наше уравнение:

$3 \cdot 4 = 12$
$12 = 12$ – получено *верное равенство*, значит, решение найдено правильно.

Диффуры устроены примерно так же!

1.1. Понятие дифференциального уравнения

Дифференциальное уравнение *первого порядка*, **содержит**:

1) независимую переменную x;
2) зависимую переменную y (функцию);
3) первую производную функции: y'.

В некоторых случаях в уравнении может отсутствовать «икс» или (и) «игрек», но это ерунда – ВАЖНО чтобы в нём **была** первая производная y', и **не было** производных высших порядков – y'', y''' и т.д.

Как вы правильно догадываетесь, **дифференциального уравнение** *«энного» порядка* **обязательно содержит** производную n-го порядка: $y^{(n)}$ и НЕ содержит производные более высоких порядков.

Что значит решить дифференциальное уравнение? Решить ДУ – это значит **найти все функции, которые удовлетворяет данному уравнению** *(впрочем, иногда хватает одной)*. То есть **корнями дифференциального уравнения являются функции**.

Для ДУ 1-го порядка множество таких функций часто имеет вид $F(x; y; C) = 0$, где C – *варьируемая* константа, принимающая различные вещественные значения. Решение, записанное в такой форме, называют ***общим интегралом*** дифференциального уравнения. В ряде случаев *общий интеграл* удаётся представить в *явном* («школьном») виде: $y = f(x; C)$, и тогда его называют ***общим решением*** дифференциального уравнения.

1.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Это простейший и самый распространённый тип дифференциального уравнения. Все методы и тонкости решений будем разбирать прямо на конкретных примерах:

Пример 1

Решить дифференциальное уравнение $xy' = y$

И вопрос первый: **с чего начать?**

В первую очередь нужно переписать производную немного в другом виде. Вспоминаем громоздкое обозначение производной: $y' = \frac{dy}{dx}$. Такое обозначение производной многим из вас наверняка казалось нелепым и ненужным, но в диффурах рулит именно оно!

Итак, на первой шаге переписываем производную в нужном нам виде:

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = y$$

Далее смотрим, **а нельзя ли разделить переменные?** – на это вообще всегда нужно посмотреть, когда вам дан ЛЮБОЙ диффур 1-го порядка.

Что значит разделить переменные? Грубо говоря, **в левой части** нам нужно собрать **все «игреки»**, а **в правой – все «иксы»**. Разделение переменных выполняется с помощью «школьных» манипуляций: вынесение за скобки, перенос слагаемых из части в часть со сменой знака, перенос множителей из части в часть по правилу пропорции и т.п.

Дифференциалы dy и dx – это **полноправные множители** и активные участники «боевых действий». В рассматриваемом примере переменные легко разделяются перекидыванием множителей по правилу пропорции *(Приложение **Школьные формулы**)*:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Переменные разделены. В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы».

Следующий этап – **интегрирование дифференциального уравнения**. Всё просто, навешиваем интегралы на обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

Разумеется, интегралы нужно взять. В данном случае они табличные (*Приложение **Таблица интегралов***):

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

Как мы помним, к любой первообразной приписывается константа. Здесь два интеграла, но константу C достаточно записать один раз *(ибо сумма двух констант – есть константа)*. В большинстве случаев её помещают в правую часть.

Строго говоря, после того, как взяты интегралы, дифференциальное уравнение считается решенным, и *общий интеграл* $\ln|y| = \ln|x| + C$ можно считать ответом. Однако многие с этим не согласятся :)

И поэтому нам нужно попробовать найти *общее решение*, то есть попытаться представить функцию в явном виде.

Пожалуйста, запомните **первый технический приём**, он очень распространен и часто применяется в практических заданиях: **если в правой части после интегрирования появляется логарифм, то константу почти всегда целесообразно записать тоже под логарифмом**.

То есть, **вместо** записи $\ln|y| = \ln|x| + C$ обычно пишут $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$.

Здесь $\ln|C|$ – это такая же полноценная константа, как и C *(поскольку $\ln|C|$ с таким же успехом принимает все действительные значения, как и C).*

Зачем это нужно? А для того, чтобы легче было выразить «игрек». Используем школьное свойство логарифмов: $\ln a + \ln b = \ln(ab)$. В данном случае:

$\ln|y| = \ln|Cx|$

Теперь логарифмы и модули можно с чистой совестью убрать:

$y = Cx$

Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

Итак, **множество функций** $y = Cx,$ где $C = const$ является *общим решением* дифференциального уравнения $xy' = y$.

Ответы многих дифференциальных уравнений довольно легко проверить. В нашем случае это делается совсем просто, берём найденное решение $y = Cx$ и находим производную *(см. Приложение* ***Таблица производных****)*: $y' = (Cx)' = C$

Теперь подставляем наше решение $y = Cx$ и найденную производную $y' = C$ в исходное уравнение $xy' = y$:

$x \cdot C = Cx$

$Cx = Cx$ – в результате получено *верное равенство*, значит, решение найдено правильно. Иными словами, **общее решение** $y = Cx$ **удовлетворяет уравнению** $xy' = y$.

Придавая константе C различные значения, можно получить бесконечно много ***частных решений*** дифференциального уравнения. Любая из функций $y = x$, $y = -3x$, $y = \frac{x}{5}$ и т.д. удовлетворяет дифференциальному уравнению $xy' = y$.

Иногда общее решение так и называют – ***семейством функций***. В данном примере общее решение $y = Cx,$ где $C = const$ – это семейство линейных функций, а точнее, семейство прямых пропорциональностей.

После обстоятельного разжевывания первого примера уместно ответить на несколько наивных вопросов о дифференциальных уравнениях:

1) *В этом примере нам удалось разделить переменные:* $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$. *Всегда ли это можно сделать?* Нет, не всегда. И даже чаще переменные разделить нельзя. Например, почти во всех уравнениях следующих параграфов ☺, где нужно использовать различные приёмы и методы нахождения решений. Уравнения с разделяющимися переменными, которые мы рассматриваем сейчас – это простейший тип дифференциальных уравнений.

2) *Всегда ли можно проинтегрировать дифференциальное уравнение?* Нет, не всегда. Очень легко придумать «навороченное» уравнение, которое в жизнь не проинтегрировать и, кроме того, существуют туча неберущихся интегралов. Но подобные ДУ можно решить приближенно с помощью специальных методов.

3) *В данном примере мы получили решение в виде общего интеграла* $\ln|y|=\ln|x|+\ln|C|$. *Всегда ли можно из общего интеграла найти общее решение, то есть, выразить «игрек» в явном виде?* Нет не всегда. Например: $y+\ln|y|=\arcsin x+xy^2+C$. Ну и как тут выразить «игрек»?! В таких случаях ответ следует записать в виде *общего интеграла*, при этом **хорошим тоном** считается представить его в виде $F(x;\,y)=C$ – с одинокой константой в правой части: $y-xy^2-\arcsin x+\ln|y|=C$. Однако это вовсе не обязательное правило, а, порой, и неуместное действие.

Кроме того, в ряде случаев общее решение найти можно, но оно записывается настолько громоздко и коряво, что уж лучше оставить ответ в виде общего интеграла.

Пожалуй, пока достаточно. В первом же уравнении нам встретился **ещё один очень важный момент**, но дабы не накрыть вас лавиной новой информации, торопиться не буду. Еще одно простое ДУ и еще один типовой приём решения:

Пример 2

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'=-2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=2$

По условию требуется найти *частное решение* ДУ, удовлетворяющее начальному условию. Такая постановка вопроса также называется ***задачей Коши***.

Сначала находим общее решение. В уравнении нет переменной «икс», но это не должно смущать, главное, в нём есть первая производная.

Переписываем производную в нужном виде:

$$\frac{dy}{dx}=-2y$$

Очевидно, что переменные можно разделить, мальчики – налево, девочки – направо:

$$\frac{dy}{y}=-2dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int dx$$

$$\ln|y|=-2x+C^*$$

Общий интеграл получен. Здесь константу я нарисовал с надстрочной звёздочкой, дело в том, что очень скоро она превратится в другую константу.

Теперь пробуем преобразовать общий интеграл в общее решение *(выразить функцию в явном виде)*. Вспоминаем старое, доброе, школьное: $\ln a=b\Rightarrow a=e^b$.

В данном случае:

Константа в показателе смотрится как-то некошерно, поэтому её обычно спускают с небес на землю. Если подробно, то происходит это так. Используя свойство степеней *(Приложение **Школьные формулы**)*, перепишем функцию следующим образом:

Если C^* – это константа, то e^{C^*} – тоже некоторая константа, переобозначим её буквой C:

$$y=Ce^{-2x}$$

Запомните «снос» константы – это **второй технический приём**, который часто используют в ходе решения дифференциальных уравнений.

Итак, общее решение: $y=Ce^{-2x}$, где $C=const$. Такое вот симпатичное семейство экспоненциальных функций.

На завершающем этапе нужно найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(0)=2$. Это тоже просто.

В чём состоит задача? Необходимо подобрать **такое** значение константы C, чтобы выполнялось заданное начальное условие $y(0)=2$.

Оформить можно по-разному, но понятнее всего, пожалуй, будет так. В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку:

$$2=Ce^{-2\cdot 0}$$

$$2=Ce^{0}$$

$$2=C\cdot 1$$

то есть, $C=2$

Стандартная версия оформления:

$$y(0)=Ce^{-2\cdot 0}=Ce^{0}=C=2$$

Теперь в общее решение $y=Ce^{-2x}$ подставляем найденное значение константы $C=2$:

$y=2e^{-2x}$ – это и есть нужное нам частное решение.

Выполним проверку. Проверка частного решение включает в себя **два этапа**.

Сначала следует проверить, а действительно ли найденное частное решение $y = 2e^{-2x}$ удовлетворяет начальному условию $y(0) = 2$? Вместо «икса» подставляем ноль и смотрим, что получится:

$y(0) = 2e^{-2\cdot 0} = 2e^0 = 2\cdot 1 = 2$ – да, действительно получена двойка, значит, начальное условие выполняется.

Второй этап уже знаком. Берём полученное частное решение $y = 2e^{-2x}$ и находим производную:

$$y' = (2e^{-2x})' = 2(e^{-2x})' = 2e^{-2x}\cdot(-2x)' = -4e^{-2x}$$

Подставляем $y = 2e^{-2x}$ и $y' = -4e^{-2x}$ в исходное уравнение $y' = -2y$:

$$-4e^{-2x} = -2\cdot 2e^{-2x}$$

$-4e^{-2x} = -4e^{-2x}$ – получено верное равенство.

Вывод: частное решение найдено правильно.

Переходим к более содержательным примерам.

Пример 3

Решить уравнение, выполнить проверку

Решение: переписываем производную в «диффурном» виде:

$$\frac{dy}{dx} + (2y+1)ctgx = 0$$

Оцениваем, можно ли разделить переменные? Можно. Переносим второе слагаемое в правую часть со сменой знака:

$$\frac{dy}{dx} = -(2y+1)ctgx$$

И перекидываем множители по правилу пропорции:

$$\frac{dy}{2y+1} = -ctgxdx$$

Переменные разделены, интегрируем обе части:

$$\int\frac{dy}{2y+1} = -\int ctgxdx$$

Должен предупредить, приближается судный день. Если вы плохо изучили неопределенные интегралы, прорешали мало примеров, то деваться некуда – придется их осваивать сейчас. На всякий случай привожу гиперссылку на **соответствующий раздел сайта** и **экстремально короткий курс по интегралам**.

Догоняющие – да догонят :) Едем дальше:

Интеграл левой части легко найти *подведением функции под знак дифференциала*, с интегралом от котангенса расправляемся стандартным приемом – с помощью бородатой тригонометрической формулы:

$$\int \frac{dy}{2y+1} = -\int \frac{\cos x dx}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(2y+1)}{2y+1} = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2}\ln|2y+1| = -\ln|\sin x| + \ln|C|$$

В правой части у нас получился логарифм, и, согласно моей первой технической рекомендации, в этом случае константу тоже следует записать под логарифмом.

Теперь пробуем упростить общий интеграл. Поскольку у нас одни логарифмы, то от них можно (и нужно) избавиться. С помощью известных свойств *(см. Приложение* ***Школьные формулы)*** максимально «упаковываем» логарифмы. Распишу очень подробно:

$$\ln|2y+1|^{\frac{1}{2}} = \ln|\sin x|^{-1} + \ln|C|$$

$$\ln\sqrt{|2y+1|} = \ln\frac{1}{|\sin x|} + \ln|C|$$

$$\ln\sqrt{|2y+1|} = \ln\left|\frac{C}{\sin x}\right|$$

Упаковка завершена, чтобы быть варварски ободранной:

$$\sqrt{|2y+1|} = \frac{C}{\sin x}$$

Можно ли выразить «игрек»? Можно. Надо возвести в квадрат обе части. Но делать этого не нужно.

Третий технический совет: если для получения общего решения нужно возводить в степень и/или извлекать корни, то *в большинстве случаев* **следует воздержаться от этих действий и оставить ответ в виде общего интеграла**. Дело в том, что общее решение будет смотреться вычурно и громоздко – с большими корнями, знаками $\pm$ и прочим математическим трэшем.

Поэтому ответ запишем в виде общего интеграла, и лучше представить его в стильном виде $F(x;y) = C$. Делать, повторюсь, это не обязательно, но всегда же выгодно порадовать профессора ;-)

Ответ: общий интеграл:

Очевидно, что **общий интеграл дифференциального уравнения можно записать не единственным способом**. Так, например, здесь напрашивается возвести обе части в квадрат и переобозначить константу $C^2 = \tilde{C}$:

$|2y+1| \cdot \sin^2 x = \tilde{C}$ – ничем не хуже, и даже лучше – удобнее будет проверять.

Как выполнить проверку? Фактически нужно найти **производную неявно заданной функции**, причём выгоднее работать как раз с «последней версией», ибо, зачем возиться с корнем? Модуль удобнее раскрыть перед дифференцированием:

$$(\pm(2y+1)\cdot\sin^2 x)' = (\widetilde{C})'$$

в левой части знак «плюс минус» выносим за скобки и пользуемся правилом дифференцирования произведения *(Приложение **Таблица производных**)*:

знак $\pm$ можно с чистой совестью убрать *(формально – умножить обе части на $\mp$)*:

$$(2y'+0)\cdot\sin^2 x + (2y+1)\cdot 2\sin x\cdot(\sin x)' = 0$$

$$2y'\sin^2 x + (2y+1)\cdot 2\sin x\cdot\cos x = 0$$

делим оба слагаемых на $2\sin x$:

$$y'\sin x + (2y+1)\cdot\cos x = 0$$

и на $\sin x$:

$$\frac{y'\sin x}{\sin x} + \frac{(2y+1)\cdot\cos x}{\sin x} = 0$$

$$y' + (2y+1)ctgx = 0$$

Получено в точности исходное дифференциальное уравнение $y' + (2y+1)ctgx = 0$, значит, общий интеграл найден правильно.

…Слишком трудно? Это ещё такая простенькая получилась проверка :)

Пример 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y\ln y + xy' = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = e$. Выполнить проверку.

Решаем самостоятельно! – пробуем свои силы.

Напоминаю, что **решение** *задачи Коши* **состоит из двух этапов**:

1) нахождение общего решения;
2) нахождение требуемого частного решения.

Проверка тоже проводится в два этапа, нужно:

1) убедиться, что найденное частное решение действительно удовлетворяет начальному условию;
2) проверить, что частное решение вообще удовлетворяет дифференциальному уравнению.

Если возникли затруднения, решайте по образцу *Пример 2*. Ну и в лучших традициях – полное решение и ответ в конце книги. Ссылку специально не ставлю, чтобы не было искушения =)

С боевым, а точнее, с учебным вас крещением!

Пример 5

Найти частное решение дифференциального уравнения $e^{y-x^2}dy-2xdx=0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=\ln 2$. Выполнить проверку.

Решение: Сначала найдем общее решение. Данное уравнение уже содержит готовые дифференциалы dy и dx, а значит, решение упрощается. Разделяем переменные:

$$e^y \cdot e^{-x^2}dy-2xdx=0$$

$$e^y \cdot e^{-x^2}dy=2xdx$$

$$e^y dy=\frac{2xdx}{e^{-x^2}}$$

$$e^y dy=2xe^{x^2}dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int e^y dy=2\int xe^{x^2}dx$$

Интеграл слева – табличный, интеграл справа – берём *методом подведения функции под знак дифференциала*:

$$\int e^y dy=\int e^{x^2}d(x^2)$$

$$e^y=e^{x^2}+C$$

Общий интеграл получен, нельзя ли удачно выразить общее решение? Можно. Навешиваем логарифмы на обе части. Поскольку правая часть не может быть отрицательной *(почему?)*, то знак модуля будет излишним – ставим просто скобки:

$$\ln e^y=\ln(e^{x^2}+C)$$

$$y=\ln(e^{x^2}+C)$$

На всякий случай *распишу:*

Итак, общее решение:

$y=\ln(e^{x^2}+C)$, где $C=const$

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию $y(0)=\ln 2$. В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» логарифм двух:

$$\ln 2=\ln(e^0+C)$$

$\ln 2=\ln(1+C)$, откуда следует, что $C=1$

Более привычное оформление: $y(0)=\ln(e^0+C)=\ln(1+C)=\ln 2 \Rightarrow C=1$

Подставляем найденное значение константы $C=1$ в общее решение и записываем

ответ: частное решение

Проверка. Сначала проверим, выполнено ли начальное условие $y(0)=\ln 2$:
$y(0)=\ln(e^0+1)=\ln(1+1)=\ln 2$ – гуд.

Теперь проверим, а удовлетворяет ли вообще найденное частное решение $y=\ln(e^{x^2}+1)$ дифференциальному уравнению. Находим производную:

$$y'=(\ln(e^{x^2}+1))'=\frac{1}{(e^{x^2}+1)}\cdot(e^{x^2}+1)'=\frac{1}{(e^{x^2}+1)}\cdot e^{x^2}\cdot(x^2)'=\frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2}+1)}$$

Смотрим на исходное уравнение: $e^{y-x^2}dy-2xdx=0$ – оно представлено в дифференциалах. Есть два способа проверки. Можно из найденной производной выразить дифференциал dy:

$$y'=\frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2}+1)}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2}+1)}\Rightarrow dy=\frac{2xe^{x^2}dx}{(e^{x^2}+1)}$$

после чего подставить $y=\ln(e^{x^2}+1)$ и $dy=\dfrac{2xe^{x^2}dx}{(e^{x^2}+1)}$ в исходное уравнение $e^{y-x^2}dy-2xdx=0$.

Но это несколько неуклюжий вариант, здесь сподручнее разделить обе части диффура на dx:

$$\frac{e^{y-x^2}dy}{dx}-\frac{2xdx}{dx}=\frac{0}{dx}$$

$$e^{y-x^2}\cdot y'-2x=0$$

и подставить в полученное уравнение $y=\ln(e^{x^2}+1),\ y'=\dfrac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2}+1)}$:

$$e^{\ln(e^{x^2}+1)-x^2}\cdot\frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2}+1)}-2x=0$$

По свойству степеней, «разбираем» экспоненту на множители:

$$e^{\ln(e^{x^2}+1)}\cdot e^{-x^2}\cdot\frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2}+1)}-2x=0$$

и используем основное логарифмическое тождество $e^{\ln a}=a$:

$$(e^{x^2}+1)\cdot\frac{1}{e^{x^2}}\cdot\frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2}+1)}-2x=0$$

$2x-2x=0$
$0=0$ – получено верное равенство.

Таким образом, частное решение найдено правильно.

Пример 6

Решить дифференциальное уравнение. Ответ представить в виде общего интеграла $F(x;y)=C$.

Это пример для самостоятельного решения.

Какие трудности подстерегают при решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными?

1) Не всегда очевидно (особенно, «чайнику»), что переменные можно разделить. Рассмотрим условный пример: $\sqrt{xy-2x}\cdot y'+xy^2+5y^2=0$. Здесь нужно провести вынесение множителей за скобки и отделить корни: $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y-2}\cdot y'+y^2(x+5)=0$. Как действовать дальше – понятно.

2) Сложности при самом интегрировании. Интегралы нередко возникают не самые простые, и если есть изъяны в навыках нахождения неопределенного интеграла, то со многими диффурами придется туго. К тому же у составителей сборников и методичек популярна логика *«раз уж дифференциальное уравнение является простым, тогда пусть интегралы будут посложнее»*.

3) Преобразования с константой – это уже относится и к диффурам других типов.

Как вы заметили, с константой в дифференциальных уравнениях можно обращаться достаточно вольно. И некоторые преобразования не всегда понятны новичку. Рассмотрим еще один условный пример: $\frac{1}{2}\ln|1-x|=\frac{1}{2}\ln|y^2-3|+C^*$. В нём целесообразно умножить все слагаемые на 2: $\ln|1-x|=\ln|y^2-3|+2C^*$. Полученная константа $2C^*$ – это тоже какая-то константа, которую можно обозначить через C^{**}. Да, и поскольку в правой части логарифм, то константу C^{**} целесообразно переписать в виде другой константы: $\ln|1-x|=\ln|y^2-3|+\ln|C|$.

Беда же состоит в том, что с индексами частенько не заморачиваются, используя одну и ту же букву C. В результате запись решения принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2}\ln|1-x|=\frac{1}{2}\ln|y^2-3|+C$$

$$\ln|1-x|=\ln|y^2-3|+C$$

$$\ln|1-x|=\ln|y^2-3|+\ln|C|$$

Что за дела?! Тут же ошибки! Формально – да. А неформально – ошибок нет, подразумевается, что при преобразовании константы C всё равно получается какая-то другая константа C.

Или другой пример, предположим, что в ходе решения уравнения получен общий интеграл $-y^3-y-x^2-\ln x=C$. Такой ответ выглядит некрасиво, поэтому целесообразно сменить у всех множителей знаки: $y^3+y+x^2+\ln x=C$. Формально здесь опять ошибка – справа следовало бы записать «минус цэ». Но неформально подразумевается, что коль скоро константа принимает **любые** значения, то менять у неё знак не имеет смысла и можно оставить ту же букву C.

Я буду стараться избегать небрежного подхода и проставлять у констант разные индексы при их преобразовании, **чего и вам советую делать.**

Пример 7

Решить дифференциальное уравнение $2(xy+y)y'+x(y^4+1)=0$

Решение: данное уравнение допускает разделение переменных. Разделяем переменные:

$$2(x+1)y\cdot\frac{dy}{dx}=-x(y^4+1)$$

$$\frac{2ydy}{y^4+1}=-\frac{xdx}{x+1}$$

Интегрируем:

$$2\int\frac{ydy}{y^4+1}=-\int\frac{(x+1-1)dx}{x+1}$$

$$\int\frac{d(y^2)}{(y^2)^2+1}=-\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$arctg(y^2)=-x+\ln|x+1|+C$$

Константу C тут не стОит определять под логарифм, поскольку ничего путного из этого не получится.

Ответ: общий интеграл: $arctg(y^2)+x-\ln|x+1|=C,$ где $C=const$

Обратите внимание, что условие этой задачи не требуется проверки. Но я **настоятельно рекомендую по возможности ВСЕГДА проверять решение.** Ну а зачем пропускать возможные ошибки, там, где их можно 100%-но не пропустить?!

Поэтому дифференцируем полученный ответ:

$$(arctg(y^2)+x-\ln|x+1|)'=(C)'$$

$$(arctg(y^2))'+(x)'-(\ln|x+1|)'=0$$

$$\frac{1}{1+(y^2)^2}\cdot(y^2)'+1-\frac{1}{x+1}=0$$

$$\frac{2yy'}{1+(y^2)^2}+\frac{x+1-1}{x+1}=0$$

$$\frac{2yy'}{1+y^4}+\frac{x}{x+1}=0$$

Приводим дроби к общему знаменателю, после чего знаменатель испаряется *(можно сказать, что мы «поднимаем» его наверх правой части и умножаем на ноль)*:

$$\frac{2yy'(x+1)+x(1+y^4)}{(1+y^4)(x+1)}=0$$

$$2(xy+y)y'+x(1+y^4)=0$$

Получено исходное дифференциальное уравнение, значит, общий интеграл найден правильно.

Пример 8

Найти частное решение ДУ.

$$2y'\sin y\cdot\cos y\cdot\sin^2 x+\cos x=0\,,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

Это пример для самостоятельного решения. Единственная подсказка – здесь получится общий интеграл, и, точнее говоря, нужно исхитриться найти не частное решение, а *частный интеграл*. Полное решение и ответ в конце урока.

Как уже отмечалось, в диффурах с разделяющимися переменными нередко вырисовываются не самые простые интегралы. И вот как раз парочка таких примеров для самостоятельного решения. **Рекомендую прорешать эти уравнения, независимо от уровня вашей подготовки** – это позволит размяться и вспомнить основные методы нахождения интегралов:

Пример 9

Решить дифференциальные уравнения

а) $(1+e^x)ydy-e^ydx=0$;

б) $y-xy'=3(1+x^2y')$

Если на чём-то появился «затык», то не теряйте время и обращайтесь к образцу, где я проставил ссылки на нужные темы и уроки. Кроме того, «внешний вид» ваших ответов может отличаться от «внешнего вида» моих ответов – как отмечалось выше, общий интеграл можно записать не единственным способом.

И возьмите на заметку важную вещь:

Если ваш ответ не совпал с заранее известным ответом *(задачника, например)*, или вам выдала «не тот ответ» какая-нибудь программа – **то это ещё не значит, что ваш ответ неправильный!** Особенно часто мои читатели приводят аргумент *«но программа же не тот ответ выдаёт!»*. Да, возможно, читатель и в самом деле ошибся, но здесь я всегда замечаю следующее: 1) программу мог написать «на коленке» какой-нибудь студент, 2) и даже в «серьёзных» программах бывают ошибки, а в задачниках – опечатки (и довольно часто), 3) зачастую машина решит вам так – как не решит ни один человек :) – наверное, все сталкивались с забавным автоматическим переводом текста на другой язык, вот и здесь так же.

Поэтому

более высокий приоритет (и авторитет) имеет ручная проверка!

Да, конечно, иногда встречаются «тяжёлые случаи», но это скорее исключение, чем правило. Но я-то не буду томить вас долгими ожиданиями – прямо сейчас, с энтузиазмом и восторженными глазами, мы перейдём к изучению следующего параграфа =)

1.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

В чём отличие однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка от других типов ДУ? Это проще всего сразу же пояснить на конкретном примере:

Пример 10

Решить дифференциальное уравнение $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$

Однако не спешим. **Что в первую очередь следует проанализировать** при решении **любого** дифференциального уравнения первого порядка? Правильно – нужно проверить, а нельзя ли в нём разделить переменные?

Попробуйте мысленно или на черновике попереносить слагаемые из части в часть, повыносить множители за скобки, поперекидывать их по правилу пропорции…. После непродолжительных и тщетных попыток, вы придёте к выводу, что «школьными» действиями **переменные тут разделить нельзя**. Возникает вопрос – как же решить этот диффур?

Нужно проверить, а **не является ли данное уравнение однородным**? Проверка несложная, и сам алгоритм проверки можно сформулировать так:

В исходное уравнение $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$:

вместо x подставляем λx;
вместо y подставляем λy;
производную не трогаем:

$$\lambda x \cdot y' = \lambda y - \lambda x e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}$$

Буква лямбда – это условный параметр, и здесь он играет следующую роль: если в результате преобразований удастся «уничтожить» ВСЕ лямбды и получить исходное уравнение, то данное дифференциальное уравнение **является однородным**.

Очевидно, что лямбды сразу сокращаются в показателе степени:

$$\lambda x \cdot y' = \lambda y - \lambda x e^{\frac{y}{x}}$$

Теперь в правой части выносим лямбду за скобки:

$$\lambda x \cdot y' = \lambda (y - x e^{\frac{y}{x}})$$

В результате параметр исчез как сон, как утренний туман:

$xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$ – и мы получили исходное уравнение.

Вывод: данное уравнение является однородным.

Как решить однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка?

У меня очень хорошая новость. Абсолютно все такие уравнения можно решить с помощью одной-единственной (!) стандартной замены.

Функцию «игрек» нужно **заменить произведением** некоторой функции t *(тоже зависящей от «икс»)* и «икса»:

$y = t(x) \cdot x$, или короче: $y = tx$

Используя правило дифференцирования произведения, найдём производную:
$y' = (tx)' = (t)' \cdot x + t \cdot (x)' = t' \cdot x + t \cdot 1 = t'x + t$

Теперь подставляем $y = tx$ и $y' = t'x + t$ в исходное уравнение $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$:

$x(t'x + t) = tx - xe^{\frac{tx}{x}}$

Что даст такая замена? После данной замены и проведенных упрощений мы гарантированно получим уравнение с разделяющимися переменными.

ЗАПОМИНАЕМ как первую любовь:) $y = tx$ **и**, соответственно, $y' = t'x + t$.

После подстановки проводим максимальные упрощения:

$x(t'x + t) = x(t - e^t)$

$t'x + t = t - e^t$

$t'x = -e^t$

В результате получено уравнение с разделяющимися переменными. Далее алгоритм работает по накатанной колее. Поскольку t – это функция, зависящая от «икс», то её производную можно записать стандартной дробью $t' = \frac{dt}{dx}$.

Таким образом, наше уравнение приобретает вид:

$x\frac{dt}{dx} = -e^t$

Разделяем переменные, при этом в левой части нужно собрать только «тэ», а в правой части – только «иксы»:

$-e^{-t}dt = \frac{dx}{x}$

Переменные разделены, интегрируем:

$-\int e^{-t}dt = \int \frac{dx}{x}$

Согласно моему первому техническому совету, константу «оформляем» под логарифм:

После того, как уравнение проинтегрировано, нужно провести **обратную замену**, она тоже стандартна и единственна:

Если $y = tx$, то $t = \frac{y}{x}$

В данном случае получаем:

Ответ: общий интеграл: $e^{-\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$, где $C = const$

Общее решение однородного уравнения почти всегда записывают в виде общего интеграла. Дело в том, что в большинстве случаев невозможно выразить «игрек» в явном виде (получить общее решение), а если и возможно, то чаще всего получается громоздкий и корявый ответ.

В нашем примере общее решение выразить можно, навешиваем логарифмы на обе части общего интеграла:

$$\ln e^{-\frac{y}{x}} = \ln\ln|Cx|$$

$$-\frac{y}{x} = \ln\ln|Cx|$$

$y = -x\ln\ln|Cx|$ – ну, ещё куда ни шло, хотя всё равно смотрится кривовато.

Полученный ответ можно проверить. Для этого нужно продифференцировать общий интеграл:

$$\left(e^{-\frac{y}{x}}\right)' = (\ln|Cx|)'$$

$$e^{-\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{Cx} \cdot (Cx)'$$

$$-e^{-\frac{y}{x}} \cdot \frac{(y'x - y)}{x^2} = \frac{1}{Cx} \cdot C$$

$$-\frac{e^{-\frac{y}{x}} \cdot (y'x - y)}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Избавляемся от дробей, умножая каждую часть уравнения на x^2:

$$-\frac{e^{-\frac{y}{x}} \cdot (y'x - y)}{x^2} \cdot x^2 = \frac{1}{x} \cdot x^2$$

$$-e^{-\frac{y}{x}} \cdot (y'x - y) = x$$

$$y'x - y = -\frac{x}{e^{-\frac{y}{x}}}$$

в результате получено исходное дифференциальное уравнение, значит, решение найдено правильно.

Кстати, в разобранном примере я не совсем «прилично» записал общий интеграл: $e^{-\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$. **Это не ошибка**, но лучше таки представить его в виде $F(x;y) = C$. И для этого сразу после интегрирования, константу следовало записать без логарифма:

$e^{-t} = \ln|x| + C$ (вот и исключение из правила)

и после обратной замены получить общий интеграл в «классическом» виде:

$e^{-\frac{y}{x}} - \ln|x| = C,$ где $C = const$

Следует отметить, что многие составители задачников и методичек прямо указывают на соблюдение «приличий», и я – не исключение:)

Пример 11

Проверить на однородность и решить дифференциальное уравнение $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$, ответ представить в виде $F(x;y) = C$

Проверку проведёте на досуге, т.к. здесь она достаточно сложнА, и я даже не стал её приводить, а то вы больше придёте к такому маньяку :)

Это вообще неприятная особенность однородных диффуров – проверять их общие интегралы обычно трудно, для этого необходима весьма и весьма приличная техника дифференцирования. Но по возможности всегда проверяйте!

А теперь обещанный важный момент, о котором я упомянул в самом начале книги, выделю жирными чёрными буквами:

Если в ходе преобразований мы «сбрасываем» множитель *(не константу)* **в знаменатель, то РИСКУЕМ потерять решения!**

Так, в процессе решения уравнения $xy' = y$ (Пример 1) «игрек» оказывается в знаменателе: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, но $y = 0$, очевидно, является решением ДУ и в результате неравносильного преобразования (деления) есть все шансы его потерять! Другое дело, что оно вошло в общее решение $y = Cx$ при нулевом значении константы. Сброс «икса» в знаменатель тоже обошелся без последствий, т.к. $x = 0$ не является решением уравнения.

Аналогичная история с уравнением $y' + (2y+1)ctgx = 0$ Пример 3, в ходе решения которого мы «сбросили» $2y+1$ в знаменатель. Строго говоря, следовало здесь проверить, а не является ли $y = -\frac{1}{2}$ решением данного диффура. Ведь является! Но и тут «всё обошлось», поскольку эта функция вошла в общий интеграл $\sqrt{|2y+1|} = \frac{C}{\sin x}$ при $C = 0$.

И если с «разделяющимися» уравнениями такое «прокатывает», то с однородными и некоторыми другими диффурами может и «не прокатить». С высокой вероятностью.

Проанализируем уже прорешанные задачи этого параграфа: в Пример 10 был «сброс» икса, однако не является решением уравнения. А вот в Пример 11 мы разделили на $\sqrt{3+t^2}=\sqrt{3+\frac{y^2}{x^2}}$, но это тоже «сошло с рук»: поскольку, то решения потеряться не могли, их тут попросту нет. Но «счастливые случаи» я, конечно же, устроил специально, и не факт, что на практике попадутся именно они:

Пример 12

Решить уравнение $xy'+2\sqrt{xy}-y=0$

И перед тем, как **решать**, СТОП, **не торопимся**, а мысленно либо на черновике анализируем: **нельзя ли разделить переменные?** Нет, нельзя.

Проверим уравнение на однородность, для этого ВМЕСТО x подставляем λx и ВМЕСТО y подставляем λy:

$$\lambda xy'+2\sqrt{\lambda x\cdot\lambda y}-\lambda y=0$$

$$\lambda xy'+2\sqrt{\lambda^2 xy}-\lambda y=0$$

$$\lambda xy'+2\lambda\sqrt{xy}-\lambda y=0$$

выносим «лямбду» за скобки λ, после чего она ликвидируется:

$$\lambda(xy'+2\sqrt{xy}-y)=0$$

$$xy'+2\sqrt{xy}-y=0$$

В результате получено исходное ДУ, значит, оно является однородным.

Следует отметить, что на чистовике такую проверку проводить не нужно *(если специально не просят)*, и очень быстро вы приноровитесь выполнять её устно.

Проведём типовую замену, а именно подставим $y=tx$ и $y'=t'x+t$ в исходное уравнение:

$$x(t'x+t)+2\sqrt{x\cdot tx}-tx=0$$

Выносим «икс» из-под корня и за скобки:

$$x(t'x+t)+2x\sqrt{t}-tx=0$$

$$x(t'x+t+2\sqrt{t}-t)=0$$

$$x(t'x+2\sqrt{t})=0$$

И вот здесь нас подстерегает первый опасный момент: сейчас мы разделим обе части на x, после чего он исчезнет. Поэтому нужно проконтролировать, не является ли $x=0$ решением ДУ. Подставляем $x=0$ исходное уравнение:

$0+0-y=0$ – получено *неверное равенство*, значит, $x=0$ не является решением и от него можно смело избавляться:

$$t'x+2\sqrt{t}=0$$

Разделяем переменные:

$$x\frac{dt}{dx}=-2\sqrt{t}$$

$$\frac{dt}{2\sqrt{t}} = -\frac{dx}{x}$$

И сейчас произошло второе опасное событие: $\sqrt{t}$ мы сбросили в знаменатель, поэтому нужно проверить, не является ли $t = 0$ решением ДУ. Поскольку $t = \frac{y}{x}$, то речь идёт о функции $y = 0$ – подставляем её вместе с производной $y' = (0)' = 0$ в исходное уравнение $xy' + 2\sqrt{xy} - y = 0$, где всё очевидно:

$0 + 0 - 0 = 0$ – получено *верное равенство*, значит, $y = 0$ – **это одно из решений ДУ, и мы его рискуем потерять**.

Берём это на заметку и продолжаем решение. Интегрируем обе части:

$$\int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\sqrt{t} = -\ln|x| + C$$

Упрощать нечего, поэтому проводим обратную замену $t = \frac{y}{x}$:

$\sqrt{\frac{y}{x}} = -\ln|x| + C$ – константу лучше записать без логарифма, поскольку результат мы уже без напоминаний представим в виде $F(x; y) = C$. Хотя, тут можно выразить и общее решение $y = x\ln^2\left|\frac{C}{x}\right|$, определив таки константу под логарифм. Но зачем лишние действия? – условие никак не оговаривает вид ответа.

А теперь вспоминаем о решении $y = 0$. В общий интеграл **оно не вошло**, и поэтому его нужно дополнительно указать в ответе:

Ответ: общий интеграл: $\sqrt{\frac{y}{x}} + \ln|x| = C,$ где $C = const$, ещё одно решение: $y = 0$

Потеря решения будет серьёзным недочётом и основанием для незачёта задачи!

Следует отметить, что **если по условию требуется найти только частное решение**, удовлетворяющее, например, условию $y(1) = 1$, то за «опасными» действиями можно особо не следить, быстренько находим общий интеграл $\sqrt{\frac{y}{x}} + \ln|x| = C$ и нужное решение:

$\sqrt{\frac{1}{1}} + \ln|1| = C \Rightarrow 1 + 0 = C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{y}{x}} + \ln|x| = 1$ – искомый частный интеграл.

Но, тем не менее, остаётся пусть маленький, но шанс, что мы потеряем **именно то** решение, которое нужно. Или не маленький – зависит от злого гения автора задачника :)

Продолжаем, сейчас будет становиться **всё жарче и жарче!**

Пример 13

Решить дифференциальное уравнение
$(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$

Это очень интересный пример, прямо целый триллер! Сначала убеждаемся в том, что переменные тут разделить нельзя, после чего проводим проверку на однородность:

$$((\lambda y)^2 - 2\lambda x \cdot \lambda y)dx + (\lambda x)^2 dy = 0$$

$$(\lambda^2 y^2 - 2\lambda^2 xy)dx + \lambda^2 x^2 dy = 0$$

$$\lambda^2 (y^2 - 2xy)dx + \lambda^2 x^2 dy = 0$$

$$\lambda^2 \cdot \left[(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy\right] = 0$$

$y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$ – в результате получено исходное ДУ, значит, оно является однородным.

Особенность этого уравнения состоит в том, что оно содержит готовые дифференциалы, и его можно решить модифицированной заменой:

$$y = tx \quad \Rightarrow \quad dy = xdt + tdx$$

Но я не советую использовать такую подстановку, поскольку получится Великая китайская стена дифференциалов, где нужен глаз да глаз. С технической точки зрения выгоднее перейти к «штриховому» обозначению производной, для этого делим все члены уравнения на dx:

$$\frac{(y^2 - 2xy)dx}{dx} + \frac{x^2dy}{dx} = \frac{0}{dx}$$

$$y^2 - 2xy + x^2y' = 0$$

И уже здесь мы совершили «опасное» преобразование! Контролируем ситуацию: уравнению $dx = 0$ соответствует $x = C$ – семейство прямых, параллельных оси OY. Являются ли они решениями нашего ДУ? Подставим в него $x = C$ и $dx = d(C) = 0$:

$$(y^2 - 2Cy) \cdot 0 + C^2dy = 0$$

$$C^2dy = 0$$

Данное равенство справедливо, если $C = 0$, то есть, при делении на dx мы рисковали потерять корень $x = 0$, **и мы его потеряли** – так как он УЖЕ **не удовлетворяет** полученному уравнению $y^2 - 2xy + x^2y' = 0$.

Следует заметить, что если бы нам **изначально** было дано уравнение $y^2 - 2xy + x^2y' = 0$, то о корне $x = 0$ речи бы не шло. Но у нас он есть, и мы его вовремя «отловили». Продолжаем решение стандартной заменой $y = tx, \quad y' = t'x + t$:

$$(tx)^2 - 2x \cdot tx + x^2(t'x + t) = 0$$

после подстановки упрощаем всё, что можно упростить:

Разделяем переменные:

$$x\frac{dt}{dx}=t-t^2$$

$$\frac{dt}{t(1-t)}=\frac{dx}{x}$$

И вот здесь снова СТОП: при делении на $t(1-t)$ мы рискуем потерять сразу две функции. Так как $t=\frac{y}{x}$, то это функции:

$$t=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x}=0 \quad \Rightarrow \quad y=0$$

$$1-t=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x}=1 \quad \Rightarrow \quad y=x$$

Очевидно, что первая функция является решением уравнения $y^2-2xy+x^2y'=0$. Проверяем вторую – подставляем $y=x$ и её производную $y'=(x)'=1$:

$$x^2-2x\cdot x+x^2\cdot 1=0$$

$$x^2-2x^2+x^2=0$$

$0=0$ – получено *верное равенство*, значит, функция $y=x$ тоже является решением дифференциального уравнения.

И при делении на $t(1-t)$ мы эти решения рискуем потерять. Впрочем, они могут войти в общий интеграл. Но могут и не войти.

Берём это на заметку и интегрируем обе части:

$$\int\frac{dt}{t(1-t)}=\int\frac{dx}{x}$$

Интеграл левой части можно решить методом выделения полного квадрата, но в диффурах удобнее использовать метод неопределенных коэффициентов.

Разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{A}{t}+\frac{B}{1-t}=\frac{1}{t(1-t)}$$

$$A(1-t)+Bt=1$$

$$\begin{cases}-A+B=0\\ A=1\end{cases}\Rightarrow B=1$$

Таким образом: $\frac{1}{t(1-t)}=\frac{1}{t}+\frac{1}{1-t}=\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}$ – удобнее так.

Берём интегралы:

$$\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}\right)dt=\ln|x|+\ln|C|$$

$\ln|t|-\ln|t-1|=\ln|x|+\ln|C|$ – так как у нас нарисовались одни логарифмы, то константу тоже заталкиваем под логарифм.

Перед обратной заменой **снова упрощаем всё, что можно упростить**:

$$\ln\left|\frac{t}{t-1}\right|-\ln|x|=\ln|C|$$

$$\ln\left|\frac{t}{x(t-1)}\right|=\ln|C|$$

Сбрасываем цепи:

$$\frac{t}{x(t-1)}=C$$

И вот только теперь обратная замена $t=\frac{y}{x}$:

Теперь вспоминаем о «потеряшках»: решение $y=0$ вошло в общий интеграл при значении $C=0$, а вот $y=x$ – «пролетело мимо кассы», т.к. оказалось в знаменателе. Поэтому в ответе оно удостаивается отдельной фразы, и да – не забываем о потерянном решении $x=0$, которое, к слову, тоже оказалось внизу

Ответ: общий интеграл. Ещё решения: $x=0,\ \ y=x$

Здесь не так трудно выразить общее решение:

$\frac{y}{y-x}=Cx\Rightarrow y=Cxy-Cx^2\Rightarrow Cxy-y=Cx^2\Rightarrow(Cx-1)y=Cx^2\Rightarrow y=\frac{Cx^2}{Cx-1}$, хотя лично я сторонник общего интеграла (за исключением каких-то совсем простых случаев).

Однако, для проверки оно весьма удобно, найдём производную:

$$y'=\left(\frac{Cx^2}{Cx-1}\right)'=\frac{(Cx^2)'(Cx-1)-Cx^2(Cx-1)'}{(Cx-1)^2}=\frac{2Cx(Cx-1)-Cx^2\cdot C}{(Cx-1)^2}$$

и подставим $y=\frac{Cx^2}{Cx-1},\ y'=\frac{2Cx}{Cx-1}-\frac{C^2x^2}{(Cx-1)^2}$ в левую часть уравнения:

$$y^2-2xy+x^2y'=\left(\frac{Cx^2}{Cx-1}\right)^2-2x\cdot\frac{Cx^2}{Cx-1}+x^2\left(\frac{2Cx}{Cx-1}-\frac{C^2x^2}{(Cx-1)^2}\right)=$$

$=\frac{C^2x^4}{(Cx-1)^2}-\frac{2Cx^3}{Cx-1}+\frac{2Cx^3}{Cx-1}-\frac{C^2x^4}{(Cx-1)^2}=0$ – в результате получена правая часть уравнения, что и требовалось проверить.

Тренируемся!

Пример 14

Решить дифференциальные уравнения

а) $y^2 + x^2 y' = xyy'$, дополнительно: решить задачу Коши для условия $y(e) = e$ и проверить полученный частный интеграл;

б) и что-нибудь простенькое… вот: выполнить проверку.

Однородность этих уравнений, думаю, всем виднА, но ни в коем случае не следует забывать и о Проверке №1 ;) Ибо уравнение $yy' = x$ тоже однородно, но в нём можно преспокойно разделить переменные. Да, встречаются и такие уравнения!

Решения и ответы в конце урока, и не забывайте, что вид ваших решений и ответов не обязан совпадать с образцом.

Итак: при неравносильных преобразованиях ВСЕГДА проверяйте *(по крайне мере, устно)*, **не теряете ли вы решения!** Какие это преобразования? Как правило, сокращение на что-то или деление на что-то. Так, например, при делении на $\sqrt{y^2 - 4}$ нужно проверить, являются ли функции решениями дифференциального уравнения. При делении на *разложимый* на множители квадратный трёхчлен $y^2 + 6y + 5$ есть все шансы потерять корни $y = -1,\ y = -5$, и так далее. В то же время при делении на $\sqrt{y^2 + 4}$ или *неразложимый* трёхчлен $y^2 + 2y + 2$ надобность в такой проверке уже отпадает – по причине того, что эти делители не обращается в ноль.

Вот ещё одна опасная ситуация:

Здесь, избавляясь от $y - 1$, следует проверить, не является ли $y = 1$ решением ДУ. Часто в качестве такого множителя встречается «икс», «игрек», и мы рискуем потерять функции $x = 0,\ y = 0$, которые могут оказаться решениями.

С другой стороны, если что-то ИЗНАЧАЛЬНО находится в знаменателе, то повода для такого беспокойства нет. Так, в однородном уравнении $y' = \dfrac{3x - 2y}{x + 5y}$ функция $y = -\dfrac{x}{5}$ заведомо не может быть решением, так как «заявлена» в знаменателе. Кстати, умножая обе части на $x + 5y$:

$(x + 5y)y' = 3x - 2y$ – мы уже «приобретаем» функцию $y = -\dfrac{x}{5}$, которая может оказаться посторонним решением, и таки беспокоиться есть о чём :)

НО. Если **изначально** предложено уравнение $(x + 5y)y' = 3x - 2y$, то эта функция наоборот – попадает под контроль (если мы сбрасываем $x + 5y$ в знаменатель).

Переходим к изучению 3-го, **важнейшего типа дифференциального уравнения:**

1.4. Линейное неоднородное уравнение первого порядка

Если переменные разделить не удалось, и уравнение однородным не является, то перед нами с ОЧЕНЬ высокой вероятностью линейное неоднородное уравнение 1-го порядка.

Данное уравнение имеет следующий вид:

$y' + p(x) \cdot y = q(x)$, где $p(x), q(x)$ – члены, зависящие *только от «икс»*.

Как вариант:

1) $q(x)$ может быть константой (конкретным числом):

$y' + p(x) \cdot y = k$;

2) $p(x)$ может быть числом:

$y' + ky = q(x)$, в простейших случаях: $y' + y = q(x)$ или $y' - y = q(x)$;

3) и иногда рядом с производной красуется «иксовый» множитель:

$r(x) \cdot y' + p(x) \cdot y = q(x)$ – это тоже линейное неоднородное уравнение *(опционально $p(x)$ или $q(x)$ – константа)*.

Разумеется, в практических примерах члены уравнения могут быть переставлены местами, но гораздо чаще они расположены в стандартном порядке:

Пример 15

Решить дифференциальное уравнение $y' - y = e^x$

Решение: неразделимость переменных и неоднородность этого уравнения совершенно очевидна, и перед нами линейное уравнение вида:
$y' - y = q(x)$

Как решить линейное неоднородное уравнение 1-го порядка?

Существуют два способа решения, и сначала я познакомлю вас с наиболее распространённым ***методом Бернулли***. Он чёткий, простой и в очередной раз приносит нам отличную новость! Линейное дифференциальное уравнение тоже можно решить одной-единственной заменой:

$y = u(x) \cdot v(x)$, где u и v – некоторые, *пока ещё* неизвестные функции, зависящие от «икс».

Коль скоро, у нас произведение $y = uv$, то по правилу дифференцирования произведения: $y' = (uv)' = u'v + uv'$

Подставляем $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ в уравнение $y' - y = e^x$:

$u'v + uv' - uv = e^x$

Все дальнейшие действия, как вы правильно догадались, будут посвящены отысканию функций «у» и «вэ».

После подстановки смотрим на два слагаемых, которые располагаются вот на этих местах:

У них нужно вынести за скобки всё, что можно вынести. В данном случае:

Теперь нужно составить систему уравнений. Система составляется стандартно:

Приравниваем к нулю то, что находится в скобках: $v' - v = 0$ (первое уравнение)

Если $v' - v = 0$, тогда наш страх заметно уменьшается:

$u'v + u \cdot 0 = e^x$

$u'v = e^x$ – это второе уравнение.

Уравнения записываем в систему:

$$\begin{cases} v' - v = 0 \\ u'v = e^x \end{cases}.$$

Именно в таком порядке. Система опять же решается стандартно.

Сначала **из первого уравнения находим функцию** $v(x)$**.** Это простейшее уравнение с разделяющимися переменными, поэтому его решение я приведу без комментариев:

$v' - v = 0$

$\frac{dv}{dx} = v$

$\int \frac{dv}{v} = \int dx$

$\ln|v| = x$

$v = e^x$

Функция v найдена. Обратите внимание, что константу C на данном этапе мы <u>не приписываем</u>.

Далее **подставляем найденную функцию** $v = e^x$ **во второе уравнение системы** $u'v = e^x$:

$u' \cdot e^x = e^x$

Да это даже не удовольствие – это мечта!

Из второго уравнения находим функцию $u(x)$:

$u' = 1$

$\frac{du}{dx} = 1$

$u = \int dx = x + C$

Функция u найдена. А вот здесь уже добавляем константу C.

Опс. А задача-то решена! Вспоминаем, с чего всё начиналось: $y = uv$.
Обе функции найдены:

$v = e^x$

$u = x + C$

Записываем общее решение:

$y = uv = (x + C) \cdot e^x$, где $C = const$

В ответе можно раскрыть скобки, это дело вкуса:

Ответ: общее решение $y = Ce^x + xe^x$, где $C = const$

Проверка выполняется по знакомой технологии, берём ответ $y = Ce^x + xe^x$ и находим производную:

$$y' = (Ce^x + xe^x)' = C(e^x)' + (x)'e^x + x(e^x)' = Ce^x + e^x + xe^x$$

Подставим $y = Ce^x + xe^x$ и $y' = Ce^x + e^x + xe^x$ в исходное уравнение $y' - y = e^x$:

$$Ce^x + e^x + xe^x - (Ce^x + xe^x) = e^x$$

$$Ce^x + e^x + xe^x - Ce^x - xe^x = e^x$$

$$e^x = e^x$$

Получено верное равенство, таким образом, общее решение найдено правильно.

Разбираем «на одном дыхании»:

Пример 16

Найти общее решение дифференциального уравнения

Решение: данное уравнение имеет «классический» вид $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ линейного уравнения. Проведем замену: $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$ и подставим $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ в исходное уравнение $y' + 2xy = xe^{-x^2}$:

$$u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2}$$

После подстановки вынесем множитель за скобки, какие два слагаемых нужно мучить – смотрите предыдущий пример. Хотя, наверное, все уже поняли:

$$u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2}$$

Составляем систему. Для этого приравниванием к нулю то, что находится в скобках: $v' + 2xv = 0$, автоматически получая и второе уравнение системы:

$$u'v + u \cdot 0 = xe^{-x^2}$$

$$u'v = xe^{-x^2}$$

В результате:

$$\begin{cases} v' + 2xv = 0 \\ u'v = xe^{-x^2} \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем функцию v:

$$\frac{dv}{dx} = -2xv$$

$$\frac{dv}{v} = -2xdx$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int xdx$$

$$\ln|v| = -x^2$$

$v = e^{-x^2}$ – без константы! Найденную функцию подставляем во второе уравнение системы $u'v = xe^{-x^2}$:

$$u' \cdot e^{-x^2} = xe^{-x^2}$$

Теперь находим функцию u. Уравнение опять получилось простенькое:

$$\frac{du}{dx} = x$$

$$u = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$$

Обе функции найдены:

$$v = e^{-x^2}$$

$$u = \frac{x^2}{2} + C$$

Таким образом, общее решение: $y = uv = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) \cdot e^{-x^2}$

Ответ: общее решение: $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) \cdot e^{-x^2}$, где $C = const$

Без остановки решаем самостоятельно:

Пример 17

Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}$, выполнить проверку.

Как видите, алгоритм довольно прост. **В чём особенность решения линейных неоднородных уравнений 1-го порядка?** Особенность состоит в том, практически всегда в ответе получается *общее решение*, в отличие от тех же однородных уравнений, где общее решение хорошо выражается крайне редко и ответ приходится записывать в виде *общего интеграла*.

Рассмотрим что-нибудь с дробями:

Пример 18

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'+\frac{y}{x}-2e^{x^2}=0$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=e$

Напоминаю, что такая постановка вопроса также называется *задачей Коши*.

И сразу обратим внимание, что уравнение представлено не совсем в стандартной форме. Этого можно не делать, но я все-таки рекомендую всегда переписывать уравнения в привычном виде $y'+p(x)\cdot y=q(x)$:

$$y'+\frac{y}{x}=2e^{x^2}$$

Алгоритм **решения** полностью сохраняется, за исключением того, что в конце прибавится один небольшой пунктик. Данное уравнение является линейным неоднородным, проведем замену $y=uv,\quad y'=u'v+uv'$:

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=2e^{x^2}$$

и типовой «вынос» за скобки:

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=2e^{x^2}$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} v'+\frac{v}{x}=0 \\ u'v=2e^{x^2} \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем v:

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x}$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v|=-\ln|x|$$

$$\ln|v|=\ln|x|^{-1}$$

$$\ln|v|=\ln\frac{1}{|x|}$$

$v=\frac{1}{x}$ – подставим найденную функцию во второе уравнение $u'v=2e^{x^2}$ системы:

$$\frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x}=2e^{x^2}$$

$$du=2xe^{x^2}dx$$

$$u=2\int xe^{x^2}dx=\int e^{x^2}d(x^2)=e^{x^2}+C$$

(здесь интеграл взят *методом подведения функции под знак дифференциала*)

Обе функции найдены, таким образом, общее решение:

$$y=uv=(e^{x^2}+C)\cdot\frac{1}{x}=\frac{e^{x^2}+C}{x},$$ где $C=const$

На заключительном этапе нужно решить задачу Коши, то есть найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=e$:

Ответ: частное решение: $y=\dfrac{e^{x^2}}{x}$

Ещё раз повторим алгоритм проверки частного решения. Сначала проверяем, действительно ли выполняется начальное условие $y(1)=e$?

$y(1)=\dfrac{e^{1^2}}{1}=e$ – да, начальное условие выполнено.

Теперь берём полученный ответ $y=\dfrac{e^{x^2}}{x}$ и находим производную. Используем правило дифференцирования частного:

$$y'=\left(\frac{e^{x^2}}{x}\right)'=\frac{(e^{x^2})'x-e^{x^2}(x)'}{x^2}=\frac{e^{x^2}\cdot 2x\cdot x-e^{x^2}}{x^2}=2e^{x^2}-\frac{e^{x^2}}{x^2}$$

Подставим $y=\dfrac{e^{x^2}}{x}$ и $y'=2e^{x^2}-\dfrac{e^{x^2}}{x^2}$ в исходное уравнение $y'+\dfrac{y}{x}-2e^{x^2}=0$:

$$2e^{x^2}-\frac{e^{x^2}}{x^2}+\frac{\frac{e^{x^2}}{x}}{x}-2e^{x^2}=0$$

$$2e^{x^2}-\frac{e^{x^2}}{x^2}+\frac{e^{x^2}}{x^2}-2e^{x^2}=0$$

$0=0$ – получено верное равенство, в чём и хотелось убедиться.

Пример 19

Найти решение задачи Коши

$$y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3,\ y(0)=\frac{1}{2}$$

Это пример для самостоятельного решения, полное решение и ответ в конце книги.

Не знаю, обратили вы внимание или нет, но всех задачах я «объявляю» тип дифференциального уравнения. Это не случайность!

В начале решения крайне желательно указать тип уравнения

Это опять же не является каким-то строгим правилом, но «голое» решение могут запросто «завернуть» со вполне обоснованным вопросом: *А почему вы здесь провели такую замену?* Риск незачёта серьёзно увеличивается, если в вашей работе «одни формулы». Поэтому **решение нужно обязательно снабжать словесными комментариями**, пусть минимальными, в частности, указывать, что это за зверь.

Перейдем к рассмотрению чуть более замысловатых уравнений:

Пример 20

Найти решение задачи Коши для данного дифференциального уравнения $x^2y' = 2xy + 3,\ y(1) = -1$

Решение: в данном уравнении слагаемые снова не на своих местах, поэтому сначала максимально близко приближаем диффур к виду $y' + p(x)\cdot y = q(x)$:

$$x^2y' - 2xy = 3$$

Что в нём особенного? Во-первых, в правой части у нас константа $q(x) = 3$. Это допустимо. Во-вторых, рядом с производной есть множитель x^2, который зависит только от «икс». Это тоже допустимо. Из-за этих особенностей линейное уравнение не перестает быть линейным.

Алгоритм решения полностью сохраняется за исключением пары нюансов в самом начале. Проведем замену $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$:

$$x^2(u'v + uv') - 2xuv = 3$$

Теперь следовало бы выполнить вынесение множителя за скобки. Прозвучит каламбурно, но сначала нам нужно раскрыть скобку, поскольку одно из нужных нам слагаемых недоступно:

Вот теперь проводим вынесение множителя скобки:

Обратите внимание на тот факт, что за скобки мы вынесли не только функцию u, но еще и «икс». **Всё**, что можно вынести за скобки – выносим.

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} xv' - 2v = 0 \\ x^2u'v = 3 \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем v:

$$x\frac{dv}{dx}=2v$$
$$\int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dx}{x}$$
$$\ln|v|=2\ln|x|$$
$$\ln|v|=\ln x^2$$
$v=x^2$ – подставим во второе уравнение системы:

$$x^2u'\cdot x^2=3$$
$$\frac{du}{dx}=\frac{3}{x^4}$$
$$u=3\int\frac{dx}{x^4}=C-\frac{1}{x^3}$$

Таким образом, общее решение:
$y=uv=\left(C-\frac{1}{x^3}\right)\cdot x^2=Cx^2-\frac{1}{x}$, где $C=const$

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию:
$$y(1)=C\cdot 1^2-\frac{1}{1}=C-1=-1\Rightarrow C=0$$

Ответ: частное решение: $y=-\frac{1}{x}$ – проверка тут чуть ли не устная.

Самостоятельно щёлкаем следующий орешек:

Пример 21

Найти частное решение ДУ
$xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$, $y(1)=0$

Какие трудности встречаются в ходе решения линейного неоднородного уравнения? Основной камень преткновения состоит в том, что может появиться довольно сложный интеграл. Как правило, неприятный интеграл появляется при нахождении функции u (в то время как с нахождением функции v обычно проблем не возникает).

Второй момент касается вообще всех диффуров, а именно их «внешнего вида». Он зачастую обманчив:

не редкость, когда «страшный» диффур на самом деле оказывается несложным, а «легкий» на вид диффур вызывает мучительную боль за бесцельно прожитые часы

Ну вот, например: $y'-2xy=2x^3y^2$ …это простое уравнение? Как вы думаете?

Вперёд! – оно нас уже заждалось =)

1.5. Дифференциальное уравнение Бернулли

Не путать с *методом Бернулли*. Данное уравнение по общей структуре напоминает линейное неоднородное уравнение первого порядка:

$y' + p(x)\cdot y = q(x)y^n$ с теми же частными разновидностями: $p(x)$ или $q(x)$ может быть числом, а у производной может присутствовать множитель $r(x)$.

Характерным признаком, по которому можно определить уравнения Бернулли, является наличие функции «игрек» в степени «эн»: y^n, при этом $n \neq 1$ *(иначе получится уравнение с разделяющимися переменными)* и $n \neq 0$ *(т.к. получится как раз линейное неоднородное ДУ)*.

Степень n может быть не только положительной, но и отрицательной, например: $y^{-1} = \frac{1}{y}$, а также обыкновенной дробью, например: $y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$.

Если $n > 0$, то уравнение Бернулли имеет очевидное решение $y = 0$, которое «теряется» в ходе использования типового алгоритма:

Пример 22

Найти частное решение дифференциального уравнения, соответствующее заданному начальному условию.

$y' - 2xy = 2x^3y^2$, $y(0) = 1$

И вопрос на засыпку: с чего начать **решение**? С проверки нельзя ли разделить переменные! Нельзя. Так же очевидно, что уравнение не однородно, и по причине множителя y^2 – не линейно. Данный диффур имеет «классический» вид $y' + p(x)y = q(x)y^n$ уравнения Бернулли.

Как решить дифференциальное уравнение Бернулли?

Уравнение Бернулли сводится к линейному неоднородному уравнению с помощью замены, и алгоритм решения незамысловат:

На первом шаге необходимо избавиться от «игрека» в правой части. Для этого сбрасываем y^2 в низ левой части и проводим почленное деление:

$\frac{y' - 2xy}{y^2} = 2x^3$ – вот здесь-то как раз и теряется решение $y = 0$. Но в нашем случае это не имеет особого значения, поскольку требуется решить задачу Коши:

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{2x}{y} = 2x^3$$

Теперь надо избавиться от «игрека» вот в этом слагаемом:

Для этого проводим замену: $\frac{1}{y}=z(x)$, то есть меняем дробь с «игреком» на функцию «зет». Найдём её производную, распишу очень подробно:

$$z'=\left(\frac{1}{y}\right)'=(y^{-1})'=-y^{2}\cdot y'=-\frac{y'}{y^{2}}\text{, откуда выразим } \frac{y'}{y^{2}}=-z'$$

Таким образом, в результате замены $\frac{1}{y}=z,\ \frac{y'}{y^{2}}=-z'$ уравнение $\frac{y'}{y}-\frac{2x}{y}=2x^{3}$ превращается в уравнение:

$$-z'-2xz=2x^{3}$$

из эстетических соображений сменим знаки:

$$z'+2xz=-2x^{3}$$

В результате получено линейное неоднородное уравнение с той лишь разницей, что вместо привычного «игрека» у нас буква «зет». Дальше алгоритм работает по накатанной колее, проводим стандартную замену $z=uv\Rightarrow z'=u'v+uv'$:

$$u'v+uv'+2xuv=-2x^{3}$$

$$u'v+u(v'+2xv)=-2x^{3}$$

Составим и решим систему: $\begin{cases}v'+2xv=0\\ u'v=-2x^{3}\end{cases}$

Из первого уравнения найдем v:

$$\frac{dv}{dx}=-2xv$$

$$\int\frac{dv}{v}=-2\int xdx$$

$$\ln|v|=-x^{2}$$

$v=e^{-x^{2}}$ – подставляем найденную функцию во второе уравнение:

$$u'\cdot e^{-x^{2}}=-2x^{3}$$

$$\frac{du}{dx}=-2x^{3}e^{x^{2}}$$

$$u=-2\int x^{3}e^{x^{2}}dx=(*)$$

Этот интеграл берётся по частям, и вместо занятых u и v, я буду использовать буквы «а» и «бэ»:

$$a=x^{2}\quad\Rightarrow\quad da=2xdx$$

$$db=-2xe^{x^{2}}dx\quad\Rightarrow\quad b=-2\int xe^{x^{2}}dx=-\int e^{x^{2}}d(x^{2})=-e^{x^{2}}$$

и по формуле:

$$(*)=-x^{2}e^{x^{2}}+2\int xe^{x^{2}}dx=-x^{2}e^{x^{2}}+\ldots$$

Таким образом:
$z=uv=(-x^2e^{x^2}+e^{x^2}+C)\cdot e^{-x^2}=Ce^{-x^2}-x^2+1$

Но это ещё далеко не всё, вспоминаем, что $\frac{1}{y}=z$ и выполняем обратную замену:

$y=\frac{1}{z}=\frac{1}{Ce^{-x^2}-x^2+1}$, где $C=const$ – общее решение.

Обратите внимание, что решение $y=0$ в это семейство не вошло, но сейчас данный факт не актуален, поскольку нам нужно решить задачу Коши, а именно найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$:

$$y(0)=\frac{1}{Ce^0-0^2+1}=\frac{1}{C+1}=1 \quad\Rightarrow\quad C=0$$

Ответ: частное решение: $y=\frac{1}{1-x^2}$

Проверка здесь весьма простА:

1) $y(0)=\frac{1}{1-0^2}=1$ – начальное условие выполнено.

2) Найдём $y'=\left(\frac{1}{1-x^2}\right)'=-\frac{1}{(1-x^2)^2}\cdot(1-x^2)'=-\frac{1}{(1-x^2)^2}\cdot(0-2x)=\frac{2x}{(1-x^2)^2}$ и подставим $y=\frac{1}{1-x^2}$, $y'=\frac{2x}{(1-x^2)^2}$ в исходное уравнение $y'-2xy=2x^3y^2$:

$$\frac{2x}{(1-x^2)^2}-2x\cdot\frac{1}{1-x^2}=2x^3\cdot\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2$$

$$\frac{2x-2x(1-x^2)}{(1-x^2)^2}=\frac{2x^3}{(1-x^2)^2}$$

$$\frac{2x-2x+2x^3}{(1-x^2)^2}=\frac{2x^3}{(1-x^2)^2}$$

$\frac{2x^3}{(1-x^2)^2}=\frac{2x^3}{(1-x^2)^2}$ – верное равенство.

Таким образом, частное решение найдено верно. При желании можно проверить и общее решение – с более громоздкими, но не сверхъестественными выкладками.

Самостоятельно:

Пример 23

$$y'+\frac{y}{x+1}+y^2=0,\; y(0)=-1$$

Здесь перед решением целесообразно представить уравнение в «стандартном» виде уравнения Бернулли

Вообще, иногда составители сборников и методичек зашифровывают уравнения до неузнаваемости, например, то же уравнение $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = -y^2$$

$$dy + \frac{ydx}{x+1} = -y^2 dx$$

$$(x+1)dy + ydx = -y^2(x+1)dx$$

$$(x+1)dy + ydx + (xy^2 + y^2)dx = 0$$

И поэтому, **если предложенное вам уравнение «по виду» не подпадает ни под один распространённый тип**, то имеет смысла пораскрывать скобки, попереставлять слагаемые и т.д. – глядишь, и вообще переменные разделить удастся!

А теперь предлагаю вашему вниманию ещё один «триллер»:

Пример 24

Найти решение ДУ $y' - \frac{2y}{x} = 2x\sqrt{y}$, соответствующее начальному условию $y(1) = 1$

Корни, куда же без них

Решение: данное ДУ имеет «классический» вид $y' + p(x) \cdot y = q(x)y^n$ уравнения Бернулли с той особенностью, что множитель y^n «замаскирован» под корень.

Сначала убираем «игрек» из правой части, для этого делим каждую часть на $\sqrt{y}$:

$$\frac{y' - \frac{2y}{x}}{\sqrt{y}} = \frac{2x\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{2\sqrt{y}}{x} = 2x$$

здесь потеряно тривиальное решение $y = 0$, но оно нас сильно не интересует.

Теперь с помощью замены нужно избавиться от «игрека» вот в этом слагаемом:

и из вышесказанного следует замена: $\sqrt{y} = z$

Найдем производную:

$z' = (\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y'$, откуда выразим:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'$$

Таким образом, получаем уравнение:

$$2z' - \frac{2z}{x} = 2x$$

каждое слагаемое которого можно «безболезненно» разделить на «двойку»:

$$z' - \frac{z}{x} = x$$

И чтобы вы не заскучали, я расскажу о ***Методе вариации произвольной постоянной***. Да не пугайтесь так! – это прикольнее замены $z = uv$:)

1) Сначала найдём общее решение соответствующего *линейного однородного* уравнения. Грубо говоря, это то же уравнение с «отброшенным» членом $q(x)$:

$$z' - \frac{z}{x} = 0$$

Данное ДУ допускает разделение переменных, и мы без труда отыскиваем его общее решение:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln|\tilde{C}|$$

$$\ln|z| = \ldots$$

$$z = \ldots$$

2) Далее вместо константы записываем *пока ещё* неизвестную функцию: $z = u(x) \cdot x$ *(это и называется варьировать постоянную)*, находим производную: $z' = (ux)' = (u)' \cdot x + u \cdot (x)' = u'x + u$ и подставляем $z = ux, \quad z' = u'x + u$ в неоднородное уравнение $z' - \frac{z}{x} = x$:

$$u'x + u - \frac{ux}{x} = x$$

Если всё сделано правильно, то два слагаемых должны испариться, как оно и происходит в нашем случае:

$$u'x + u - u = x$$

$$u'x = x$$

тут ещё и «иксы» исчезают:

$$\frac{du}{dx} = 1$$

в результате получилось примитивное уравнение с очевидным решением:

$$\int du = \int dx$$

$$u = x + C$$

Теперь вспоминаем, что $z = ux = (x + C)x$, и в результате обратной замены $z = \sqrt{y}$ получаем общий интеграл $\sqrt{y} = (x + C) \cdot x$, из которого легко выразить и общее решение:

$$y = ((x + C) \cdot x)^2 = (x + C)^2 \cdot x^2, \quad \text{где } C = const$$

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию $y(1)=1$:

$y(1)=(1+C)^2\cdot 1=1$

…вот тебе и раз. Уравнение $(1+C)^2=1$ имеет два корня $C=-2, C=0$ и в результате получаются… два частных решения?

Нет! Когда мы выражали общее решение, то выполнили возведение в квадрат, из-за чего у нас появился *посторонний* корень. Поэтому начальное условие $x=1, y=1$ лучше подставить непосредственно в общий интеграл $\sqrt{y}=(x+C)\cdot x$:

$\sqrt{1}=(1+C)\cdot 1$

$1=1+C \quad \Rightarrow \quad C=0$ – и помещаем этот ноль уже в общее решение $y=(x+C)^2\cdot x^2$:

$y=(x+0)^2\cdot x^2=x^4$

Легко видеть, что значению $C=-2$ соответствует *частный интеграл* $\sqrt{y}=(x-2)\cdot x$, и он не удовлетворяет начальному условию $y(1)=1$, ибо $\sqrt{1}\neq -1$.

Вот так-то оно бывает! – в однородных уравнениях мы «теряли» решения, а здесь наоборот – «приобрели».

Ответ: частное решение $y=x^4$ – проверку выполните сами, она тут устная.

Но кино ещё не закончилось, и следующий факт должен быть понятен, даже если вы не знаете, как выглядит график многочлена 4-й степени. Семейство *кривых* $y=(x+C)^2\cdot x^2$ (общее решение ДУ) расположено в верхней полуплоскости и *касается* прямой $y=0$ в каждой её точке. Более того, множество графиков $y=(x+C)^2\cdot x^2$ *(при всех значениях константы)* своими точками касания *порождает* решение $y=0$, которое, как заправский партизан засело в чаще леса и в общее решение не вошло.

Такое необычное решение называют ***особым решением*** дифференциального уравнения. В общем случае особое решение тоже является кривой, которая *огибает* «основное семейство». В рассмотренном же примере оно представляет собой прямую, которая ассоциируется с «подставкой» под графики функций $y=(x+C)^2\cdot x^2$.

Пример 25

Решить дифференциальное уравнение $xy'-4y=x^2\sqrt{y}$

После сведения к неоднородному уравнению я использовал *метод вариации произвольной постоянной*, но, разумеется, там годится и замена $z=ux$.

Иногда в уравнениях Бернулли встречаются и другие степени «игрека», например: $y'+\frac{3y}{x}=x^3y^3$ с заменой или $2y'-3y\cos x=-e^{-2x}\cdot(2+3\cos x)\cdot y^{-1}$ с заменой. Решения эти диффуров можно найти в **соответствующей статье** сайта, но они не столь актуальны, поскольку есть более насущный материал:

1.6. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Сначала быстренько вспомним, что такое ***частные производные*** и *полный дифференциал* функции двух переменных. Рассмотрим простую функцию:

$$z = F(x;\, y) = x^2 + y^2 - xy + x - y$$

и найдём её частные производные первого порядка: $F'_x = \dfrac{\partial F}{\partial x},\ F'_y = \dfrac{\partial F}{\partial y}$ – в диффурах больше «в почёте» их дробные обозначения. Повторяем основное правило:

– если мы берём производную по «икс», то «игрек» считается константой:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x^2 + y^2 - xy + x - y)'_x = 2x + 0 - y + 1 - 0 = 2x - y + 1$$

– если мы берём производную по «игрек», то константой уже считается «икс»:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^2 + y^2 - xy + x - y)'_y = 0 + 2y - x + 0 - 1 = 2y - x - 1$$

Полный дифференциал имеет вид: $dF = \dfrac{\partial F}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy$, в данном случае:

$$dF = (2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy$$

Пример 26

Решить дифференциальное уравнение $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$

Не ожидали? =)

То есть, данное дифференциальное уравнение является полным дифференциалом функции $F(x;\, y) = x^2 + y^2 - xy + x - y + C$ – единственное, к ней нужно ещё приписать константу. Отсюда и название уравнения.

Как решить диффур в полных дифференциалах?

Очевидно, что нужно выполнить некоторые обратные действия, чтобы восстановить исходную функцию (общий интеграл). Не так давно я что-то там дифференцировал. Какое действие является обратным? Правильно, интегрирование.

А теперь, пожалуйста, забудьте задачку про частные производные и готовый ответ. Ведь когда нам предложено **произвольное дифференциальное уравнение**, то **мы ещё не знаем** о том, что это уравнение в полных дифференциалах. И поэтому сначала имеет смысл «покрутить-повертеть» исходное уравнение:

$$(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$$

Вдруг тут можно разделить переменные? Или уравнение является однородным? А может здесь «спрятан» какой-то другой тип уравнения? – не так давно я зашифровал в такой форме даже уравнение Бернулли!

И только после этих безуспешных попыток проверяем: **а не является ли данное ДУ уравнением в полных дифференциалах?** Чтобы выполнить эту проверку, выпишем из уравнения $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$ множители, находящиеся при дифференциалах:

$P=2x-y+1, \quad Q=2y-x-1$ – **строго обозначая их буквами «пэ» и «ку», и строго в таком порядке!** Это стандарт.

Теперь найдём следующие частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=(2x-y+1)'_y=0-1+0=-1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=(2y-x-1)'_x=0-1-0=-1$$

Если $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ (наш случай), то данное ДУ является полным дифференциалом $dF=F'_x dx+F'_y dy$ некоторой функции F *(а равенство вышенайденных производных – есть ни что иное, как равенство смешанных производных 2-го порядка:* $F''_{xy}=F''_{yx}$ *).*

Ну а коль скоро уравнение $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$ имеет вид $\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$, то:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x-y+1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2y-x-1$$

Таким образом, нам известны две частные производные, и задача состоит в том, чтобы восстановить общий интеграл $F(x;y;C)=0$. Существуют два зеркальных способа решения, и мы пойдём более привычным путём, и именно начнём с «иксовой» производной $\frac{\partial F}{\partial x}=2x-y+1$. Нижнюю производную $\frac{\partial F}{\partial y}=2y-x-1$ пока запишем на листочек и спрячем в карман. Да-да – **прямо так и сделайте!** Я подожду….

Действие первое. Поскольку в нашем распоряжении есть частная производная $\frac{\partial F}{\partial x}=2x-y+1$, то нужная нам функция F восстанавливается с помощью обратного действия – *частного интегрирования* по «икс». Интегрирование осуществляется по тому же принципу, что и нахождение частных производных.

Когда мы берём интеграл по «икс», то переменная «игрек» считается <u>константой</u>, распишу очень подробно:

$F=\int(2x-y+1)dx=2\int xdx-y\int dx+\int dx=2\cdot\frac{x^2}{2}-\ldots$, где $\varphi(y)$ – некоторая, *пока ещё* неизвестная функция, зависящая <u>только от «игрек»</u>.

Правильно ли найден интеграл? Выполним проверку, т.е. возьмём частную производную по «икс»:

$F'_x = (x^2 - xy + x + \varphi(y))'_x = 2x - y + 1 + 0 = 2x - y + 1$ – получена исходная подынтегральная функция, в чём и требовалось убедиться

Примечание*: надеюсь всем, понятно, почему* $(\varphi(y))'_x = 0$ *– функция* $\varphi(y)$ *зависит только от «игрек», а, значит, является константой.*

Действие второе. Берем «недоделанный» результат $F = x^2 - xy + x + \varphi(y)$ и дифференцируем его по «игрек»:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^2 - xy + x + \varphi(y))'_y = 0 - x + 0 + \varphi'_y(y) = -x + \varphi'_y(y)$$

Функцию $\varphi(y)$ мы пока не знаем, но производная-то по «игрек» у неё существует, поэтому запись $\varphi'_y(y)$ – совершенно законна.

Действие третье. Перепишем результат предыдущего пункта: $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -x + \varphi'_y(y)$ и достаем из широких штанин листочек с производной: $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y - x - 1$

Приравниваем одно с другим:

$-x + \varphi'_y(y) = 2y - x - 1$

и уничтожаем всё, что можно уничтожить:

$\varphi'_y(y) = 2y - 1$

Находим функцию $\varphi(y)$, для этого нужно взять интеграл:

$$\varphi(y) = \int (2y - 1)dy = y^2 - y + C$$

Заключительный аккорд: подставим найденную функцию $\varphi(y) = y^2 - y + C$ в «недоделанный» результат $F = x^2 - xy + x + \varphi(y)$:

$$F = x^2 - xy + x + y^2 - y + C$$

Ответ: общий интеграл: $x^2 + y^2 - xy + x - y + C = 0$, где $C = const$

Проверка уже выполнена в самом начале урока – находим частные производные первого порядка и составляем полный дифференциал, в результате должно получиться исходное дифференциальное уравнение. Оно же получится и в результате прямого дифференцирования:

$$(x^2 + y^2 - xy + x - y + C)' = (0)'$$
$$2x + 2yy' - y - xy' + 1 - y' + 0 = 0$$
$$(2y - x - 1)y' + (2x - y + 1) = 0$$
$$(2y - x - 1)\frac{dy}{dx} + (2x - y + 1) = 0$$
$$(2y - x - 1)dy + (2x - y + 1)dx = 0$$

Проделаем всё то же самое, только короче:

Пример 27

Решить дифференциальное уравнение $(3x^2 - 3y^2 + 4x)dx - (6xy + 4y)dy = 0$

Решение: после неутешительного анализа на «другие типы», проверим, не является ли данный диффур уравнением в полным дифференциалах. Выписываем множители при дифференциалах:

$$P = 3x^2 - 3y^2 + 4x, \quad Q = -(6xy + 4y) = -6xy - 4y$$

Внимание! Не теряем «минус» при записи Q!

Найдём частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (3x^2 - 3y^2 + 4x)'_y = 0 - 6y + 0 = -6y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (-6xy - 4y)'_x = -6y - 0 = -6y$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, значит, уравнение $(3x^2 - 3y^2 + 4x)dx - (6xy + 4y)dy = 0$ является полным дифференциалом некоторой функции и имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

В данном случае:

$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 4x$ – будем работать с этой производной.

$\frac{\partial F}{\partial y} = -6xy - 4y$ – про эту производную пока забываем.

1) Если $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 4x$, то:

$$F = \int (3x^2 - 3y^2 + 4x)dx = 3\int x^2 dx - 3y^2 \int dx + 4\int xdx =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 3y^2 \cdot \ldots$$

где $\varphi(y)$ – некоторая, *пока ещё* неизвестная функция, зависящая только от «игрек».

Напоминаю, что когда мы интегрируем по «икс», то переменная «игрек» считается константой и выносится за значок интеграла.

2) Берём «недоделанный» результат предыдущего пункта $F = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 + \varphi(y)$ и дифференцируем его по «игрек»:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^3 - 3xy^2 + 2x^2 + \varphi(y))'_y = 0 - 6xy + \ldots$$

3) Переписываем найденный результат: $\frac{\partial F}{\partial y} = -6xy + \varphi'_y(y)$ и вспоминаем про «забытую» производную:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -6xy - 4y$$

Приравниваем и сокращаем:

$$-6xy + \varphi'_y(y) = -6xy - 4y$$

$$\varphi'_y(y) = -4y$$

Примечание*: на практике решение обычно записывают короче, объединяя пункты №№2,3:*

$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^3 - 3xy^2 + 2x^2 + \varphi(y))'_y = 0 - 6xy + 0 + \varphi'_y(y)...$, *то есть сразу же после нахождения производной приравнивается «забытая» производная. В последнем равенстве* $-6xy + \varphi'_y(y) = -6xy - 4y$ *проводятся сокращения, откуда следует:* $\varphi'_y(y) = -4y$.

Восстанавливаем функцию $\varphi(y)$ интегрированием по «игрек»:

$$\varphi(y) = -4\int y dy = -4 \cdot \frac{y^2}{2} + C = -2y^2 + C$$

В «недоделанный» результат $F = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 + \varphi(y)$ пункта №1 подставляем найденную функцию $\varphi(y) = -2y^2 + C$.

Ответ: общий интеграл: $x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + C = 0,$ где $C = const$

Константу можно записывать и в правой части, но тогда возникает заморочка с её переобозначением, и поэтому я лично привык оставлять ответ именно в таком виде.

Выполним проверку. Найдём частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + C)'_x = 3x^2 - 3y^2 + ...$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + C)'_y = 0 - 6xy + 0 - 4y + 0 = -6xy - 4y = -(6xy + 4y)$$

Составим дифференциальное уравнение $\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$:

$$(3x^2 - 3y^2 + 4x)dx - (6xy + 4y)dy = 0$$

Получено исходное ДУ, значит, задание выполнено правильно.

Второй способ состоит в дифференцировании неявно заданной функции: $x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + C = 0,$ где $C = const$ – с тем же итоговым результатом.

По «горячим следам» решаем самостоятельно!

Пример 28

$(6y-3x^2+3y^2)dx+(6x+6xy)dy=0$ и выполнить проверку.

Образец решения я записал максимально коротко и без пунктов, то есть приблизил его к «боевым» условиям – примерно так нужно оформлять задачу на практике.

Многочлены хорошо, а другие функции – лучше. Рассмотрим ещё пару примеров.

Пример 29

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$\frac{2x(1-e^y)dx}{(1+x^2)^2}+\frac{e^y dy}{1+x^2}=0$$

…ну а кому сейчас легко? ☺

Решение: после предварительного анализа, проверим, является ли данное ДУ уравнением в полных дифференциалах. Выпишем члены при дифференциалах:

$$P=\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2},\quad Q=\frac{e^y}{1+x^2}$$

и найдём частные производные

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\left(\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\right)'_y=\frac{2x}{(1+x^2)^2}\cdot(1-e^y)'_y=\frac{2x}{(1+x^2)^2}\cdot\ldots$$

– обратите внимание, как за знак производной выносятся целые выражения с «мёртвыми» переменными:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\left(\frac{e^y}{1+x^2}\right)'_x=e^y\cdot((1+x^2)^{-1})'_x=-e^y(1+x^2)^{-2}\cdot(1+x^2)'_x=$$

$$=-\frac{e^y}{(1+x^2)^2}\cdot(0+2x)=-\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2}$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, значит, уравнение $\dfrac{2x(1-e^y)dx}{(1+x^2)^2}+\dfrac{e^y dy}{1+x^2}=0$ является полным дифференциалом некоторой функции F и имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$$

То есть, в нашем распоряжении оказываются частные производные первого порядка:

$\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}$ – работаем с этой производной

$\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{e^y}{1+x^2}$ – про эту производную пока забываем

Если $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}$, то:

$$F=\int\frac{2x(1-e^y)dx}{(1+x^2)^2}=(1-e^y)\int\frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}=\ldots$$

Здесь $(1-e^y)$ является константой, которая вынесена за знак интеграла, а сам интеграл найден *методом подведения функции под знак дифференциала*.

Находим частную производную по «игрек»:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\left(\frac{e^y-1}{1+x^2}+\varphi(y)\right)'_y=\frac{e^y}{1+x^2}+\varphi'_y(y)=\frac{e^y}{1+x^2}$$

Это стандартное короткое оформление задания, когда после нахождения производной сразу приравнивается «забытая» производная $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{e^y}{1+x^2}$.

Из последнего равенства $\frac{e^y}{1+x^2}+\varphi'_y(y)=\frac{e^y}{1+x^2}$ следует, что $\varphi'_y(y)=0$, это простейший интеграл:

$$\varphi(y)=\int 0dy=C=const$$

Подставляем найденную функцию $\varphi(y)=C$ в «недоделанный» результат $F=\frac{e^y-1}{1+x^2}+\varphi(y)$.

Ответ: общий интеграл: $\frac{e^y-1}{1+x^2}+C=0,$ где $C=const$

И как всегда – приятная неожиданность! Научимся решать задачу «зеркальным» способом, а именно:

$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}$ – про эту производную пока забываем

$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{e^y}{1+x^2}$ – и начинаем «пляску» от «игрековой» производной.

Так как $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{e^y}{1+x^2}$, то $F=\int\frac{e^ydy}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}\int e^ydy=\frac{e^y}{1+x^2}+\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – *пока ещё* неизвестная функция, зависящая только от «икс».

Дифференцируем этот результат по «икс» и приравниваем его к «забытой» производной:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\left(\frac{e^y}{1+x^2}+\varphi(x)\right)'_x=e^y\cdot((1+x^2)^{-1})'_x+\varphi'_x(x)=-\frac{e^y}{(1+x^2)^2}\cdot 2x+\varphi'_x(x)=$$

$$=\ldots$$

В правой части выполняем почленное деление (можно это было сделать сразу):

$$-\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2}+\varphi'_x(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}-\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2}$$

уничтожаем несладкую парочку:

$$\varphi'_x(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

и восстанавливаем функцию «фи»:

$\varphi(x)=\int\frac{2xdx}{(1+x^2)^2}=\int\frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{1+x^2}+C$ – после чего подставляем её в «недоделанную» функцию $F=\frac{e^y}{1+x^2}+\varphi(x)$:

$$F=\frac{e^y}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}+C$$

Ответ: общий интеграл: $\frac{e^y-1}{1+x^2}+C=0,$ где $C=const$

«Зеркальный» способ решения **ни в коем случае не лишний**, и тем более не является «понтами». На «традиционном» пути запросто может встретиться трудный или ОЧЕНЬ трудный интеграл, и тогда альтернативный вариант окажется просто спасением! И, кроме того, второй способ может показаться вам удобнее чисто субъективно.

Пример 30

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$$

Решайте так – как вам удобно! Но на всякий-то случай пройдите обоими путями ;)

Кроме того, существуют уравнения, *сводящиеся* к уравнению в полных дифференциалах, которые решаются методом *интегрирующего множителя*. Но вероятность встречи с ними крайне мала, и поэтому мы продолжаем.

Полного вам дифференциала во второй части книги! =)

2. Дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$F(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0$ и **обязательно** содержит производную «энного порядка» $y^{(n)}$ и НЕ содержит производные более высоких порядков.

Так, простейшее уравнение 2-го порядка $F(x, y, y', y'') = 0$ выглядит так: $y'' = 0$, простейшее уравнение 3-го порядка $F(x, y, y', y'', y''') = 0$ – так: $y''' = 0$ и т.д.

Принцип точно такой же: **решить ДУ высшего порядка – это значит, найти множество функций, которые удовлетворяют данному уравнению**. Это множество называют *общим интегралом* $F(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ (или *общим решением*), которое содержит ровно «эн» констант. Придавая им различные значения, мы можем получить бесконечно много *частных интегралов (решений)* дифференциального уравнения.

Капитан Очевидность говорит нам о том, что существуют разные типы уравнений высших порядков, и мы незамедлительно приступаем к их изучению.

2.1. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Уже из самого названия становится понятно, что такие сводятся к уравнениям более низкого порядка. Различают **три подтипа** таких диффуров, и чтобы не плодить трёхуровневое меню, я буду использовать словесную нумерацию:

Подтип первый. Уравнения, разрешимые повторным интегрированием

Данное уравнение имеет вид $y^{(n)} = f(x)$, где $f(x)$ зависит *только от «икс»*, и в тривиальном случае представляет собой константу.

Чтобы решить такое уравнение, нужно n раз проинтегрировать правую часть.

Пример 31

$y'' = x^2 - 2x$

Решение: данное дифференциальное уравнение имеет вид $y'' = f(x)$. Интегрируем правую часть, понижая степень уравнения до 1-го порядка:

$y' = \int (x^2 - 2x)dx = \frac{1}{3}x^3 - 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + C_1 = \frac{x^3}{3} - x^2 + C_1$, или короче: $y' = \frac{x^3}{3} - x^2 + C_1$

Теперь интегрируем правую часть еще раз, получая *общее решение*:

$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + C_1 \right) dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2 = \frac{x^4}{12} - ...$$

Ответ: общее решение: $y = \frac{x^4}{12} - ...,$ где $C_1, C_2 - const$

Проверяются такие уравнения обычно очень легко. В данном случае нужно лишь найти вторую производную:

$$y' = \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2\right)' = \frac{1}{12}\cdot 4x^3 - \frac{1}{3}\cdot 3x^2 + C_1 + 0 = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C_1$$

$$y'' = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + C_1\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 - 2x + 0 = x^2 - 2x$$

В результате получено исходное дифференциальное уравнение $y'' = x^2 - 2x$, значит, общее решение найдено правильно.

Пример 32

Решить дифференциальные уравнения

а) $y'' = 3$, б) $y'' + \sin 2x = \sqrt{x}$, в) $y''' = 0$

Это пример для самостоятельного решения, … не тушуемся – решаем!

Нахождение *частного решения* (задача Коши) имеет свои особенности, одна из которых такова: **каков порядок уравнения – столько и начальных условий**. Это, кстати, касается и других типов диффуров, и если у вас начальных условий меньше, то в условии вашей задачи опечатка, точнее, недопечатка.

Пример 33

Найти частное решение ДУ, соответствующее заданным начальным условиям

$$y''' = e^{2x}, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -\frac{1}{2}$$

Уравнение третьего порядка – три начальных условия.

Решение: данное уравнение имеет вид $y''' = f(x)$, а значит, нам нужно последовательно проинтегрировать правую часть три раза.

Сначала понижаем степень уравнения до второго порядка:

$$y'' = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$$

Первый интеграл принёс нам константу C_1. В уравнениях рассматриваемого типа рационально **сразу же** применять подходящие начальные условия.

Итак, у нас найдено $y'' = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$, и, очевидно, к полученному уравнению подходит начальное условие $y''(0) = -\frac{1}{2}$. В соответствии с этим условием:

$$y''(0) = \frac{1}{2} + C_1 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1$$

Таким образом: $y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - 1$

На следующем шаге берём второй интеграл, понижая степень уравнения до первого порядка:

$$y' = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} - 1 \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} - x + C_2$$

Выползла константа C_2, с которой мы немедленно расправляемся. Возникла тут у меня забавная ассоциация, что я злой дед Мазай с одноствольным ружьём. Ну и действительно, константы «отстреливаются», как только покажут уши из-под интеграла.

В соответствии с начальным условием $y'(0) = \frac{1}{4}$:

$$y'(0) = \frac{1}{4} - 0 + C_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow C_2 = 0$$

Таким образом: $y' = \frac{1}{4} e^{2x} - x$

И, наконец, третий интеграл:

$$y = \int \left(\frac{1}{4} e^{2x} - x \right) dx = \ldots$$

Для третьей константы используем последний патрон $y(0) = \frac{9}{8}$:

$$y(0) = \frac{1}{8} - 0 + C_3 = \frac{9}{8} \Rightarrow C_3 = 1$$

Зайцы плачут, заряды были с солью (я же не маньяк какой-то ☺)

Ответ: частное решение: $y = \frac{1}{8} e^{2x} - \ldots$

Выполним **проверку**, благо, она ненапряжная и чёткая:

1) Проверяем начальное условие $y(0) = \frac{9}{8}$:

$y(0) = \frac{1}{8} - 0 + 1 = \frac{9}{8}$ – выполнено.

2) Находим производную:

$$y' = \left(\frac{1}{8} e^{2x} - \frac{x^2}{2} + 1 \right)' = \frac{1}{8} \cdot 2e^{2x} - \frac{2x}{2} + 0 = \frac{1}{4} e^{2x} - x$$

Проверяем начальное условие $y'(0) = \frac{1}{4}$:

$y'(0) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$ – выполнено.

3) Находим вторую производную:

$$y''=\left(\frac{1}{4}e^{2x}-x\right)'=\frac{1}{2}e^{2x}-1$$

Проверяем начальное условие $y''(0)=-\frac{1}{2}$:

$y''(0)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$ – выполнено.

4) Найдем третью производную:

$$y'''=\left(\frac{1}{2}e^{2x}-1\right)'=e^{2x}-0=e^{2x}$$

Получено исходное дифференциальное уравнение $y'''=e^{2x}$

Вывод: задание выполнено верно.

Аналогичное задание для самостоятельного решения:

Пример 34

Найти частное решение уравнения, соответствующее заданным начальным условиям, и выполнить проверку

$x^3y'''=6$, $y(1)=0$, $y'(1)=5$, $y''(1)=1$

Решение и ответ в конце книги.

Время от времени в дифференциальных уравнениях рассматриваемого типа приходится находить более трудные интегралы: использовать *метод замены переменной*, *интегрировать по частям*, прибегать к другим ухищрениям. Но это уже всё зависит от вашей техники интегрирования и к сегодняшней теме не относится.

Подтип второй. В уравнении в явном виде отсутствует функция y.

Простейшее уравнение этого подтипа в общем виде выглядит так:
$F(x,y',y'')=0$ – всё есть, а «игрека» нет. Точнее, его нет *в явном виде*, но он обязательно всплывёт в ходе решения.

Кроме того, вместе с «игреком» в явном виде может отсутствовать первая производная:
$F(x,y'',y''')=0$ – это уже уравнение третьего порядка.

Может дополнительно отсутствовать и вторая производная:
$F(x,y''',y^{IV})=0$ – уравнение четвертого порядка.

И так далее. Думаю, вы увидели закономерность, и теперь сможете без труда определить такое уравнение в практических примерах. Заостряю внимание, что во всех этих уравнениях **обязательно** присутствует независимая переменная «икс».

На самом деле есть общая формула и строгая формулировка, но от них легче не станет, и поэтому мы сразу переходим к практическим вопросам:

Как решать такие уравнения? Они решаются с помощью очень простой замены.

Пример 35

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + \frac{y'}{x+1} = 9(x+1)$$

Решение: в предложенном уравнении второго порядка в явном виде не участвует переменная y. Заменим первую производную y' новой функцией z, которая зависит от «икс»: $y' = z(x)$

Если $y' = z$, то $y'' = z'$

Цель проведённой замены очевидна – понизить степень уравнения:

$$z' + \frac{z}{x+1} = 9(x+1)$$

Получено самое что ни на есть обычное линейное неоднородное ДУ 1-го порядка, с той лишь разницей, что вместо привычной функции «игрек» у нас функция «зет». Для разнообразия я решу его методом вариации произвольной постоянной:

1) Найдём общее решение соответствующего *линейного однородного* уравнения:

$$z' + \frac{z}{x+1} = 0$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x+1}$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|z| = -\ln|x+1| + \ln|C|$$

$$\ln|z| = \ln\left|\frac{C}{x+1}\right|$$

$$z = \frac{\tilde{C}}{x+1}, \text{ где } \tilde{C} = const$$

2) Варьируя постоянную $\tilde{C}$, в неоднородном уравнении проведём замену:

$z = \dfrac{u}{x+1} \quad \Rightarrow \quad z' = \ldots$ – подставляем «зет» и «зет штрих» в уравнение $z' + \dfrac{z}{x+1} = 9(x+1)$:

$$\frac{u'}{x+1} - \frac{u}{(x+1)^2} + \frac{u}{(x+1)^2} = 9(x+1)$$

Пара слагаемых в левой части испаряются, значит, мы на верном пути:

$$\frac{u'}{x+1} = 9(x+1)$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{du}{dx} = 9(x+1)^2$$

$$\int du = 9\int (x+1)^2 dx$$

$$u = 9\int (x+1)^2 dx = 9 \cdot \frac{1}{3}(x+1)^3 + C_1 = 3(x+1)^3 + C_1$$

Таким образом:

$$z = \frac{u}{x+1} = \frac{3(x+1)^3 + C_1}{x+1} = \ldots$$

Итак, функция z найдена, и тут на радостях можно забыть про одну вещь и машинально записать ответ. Нет-нет, ещё не всё. Вспоминаем, что в начале задания была выполнена замена $y' = z$, следовательно, нужно провести обратную замену $z = y'$:

$$y' = 3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1}$$

Общее решение восстанавливаем интегрированием правой части:

$$y = \int \left(3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1} \right) dx = (x+1)^3 + C_1 \ln|x+1| + C_2$$

На заключительном этапе нарисовался партизан «игрек», который, как мы помним, в дифференциальное уравнение в явном виде не входил.

Ответ: общее решение: $y = (x+1)^3 + C_1 \ln|x+1| + C_2$, где $C_1, C_2 - const$

В большинстве случае проверить такие уравнения не составляет особого труда.

Находим первую и вторую производные от ответа:

$$y' = ((x+1)^3 + C_1 \ln|x+1| + C_2)' = 3(x+1)^2 + \frac{C_1}{(x+1)}$$

$$y'' = \left(3(x+1)^2 + \frac{C_1}{(x+1)} \right)' = 6(x+1) - \frac{C_1}{(x+1)^2}$$

и подставляем их в исходное уравнение $y'' + \frac{y'}{x+1} = 9(x+1)$:

$$6(x+1) - \frac{C_1}{(x+1)^2} + \frac{\left(3(x+1)^2 + \frac{C_1}{(x+1)} \right)}{x+1} = 9(x+1)$$

$$6(x+1) - \frac{C_1}{(x+1)^2} + 3(x+1) + \frac{C_1}{(x+1)^2} = 9(x+1)$$

$$6(x+1) + 3(x+1) = 9(x+1)$$

$9(x+1) = 9(x+1)$ – в результате получено верное равенство, значит, общее решение найдено правильно.

Если дано аналогичное уравнение с более «высокими» производными:

$y''' + \frac{y''}{x+1} = 9(x+1)$, то решение будет очень похожим.

В результате замены $y'' = z \Rightarrow y''' = z'$ мы получим то же самое линейное уравнение $z' + \frac{z}{x+1} = 9(x+1)$, однако после обратной замены у нас нарисуется диффур *первого подтипа*:

$y'' = 3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1}$, который следует решить двукратным интегрированием правой части:

$y' = \int\left(3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1}\right)dx = (x+1)^3 + C_1\ln|x+1| + C_2$ – в точности ответ предыдущей задачи, который нужно проинтегрировать ещё раз:

$y = \int\left((x+1)^3 + C_1\ln|x+1| + C_2\right)dx = \frac{(x+1)^4}{4} + \ldots$

Готово.

Всегда ли в результате таких замен получается линейное неоднородное уравнение 1-го порядка? Нет, не всегда. Запросто может получиться уравнение с разделяющимися переменными, однородное уравнение или какая-нибудь другая интересность:

Пример 36

Решить дифференциальное уравнение

$(1+\sin x)y''' = \cos x \cdot y''$

Это пример для самостоятельного решения.

Что делать, если в уравнении рассмотренного подтипа требуется найти частное решение? Выгодно использовать ту же методику – последовательный «отстрел» констант.

Подтип третий. В дифференциальном уравнении в явном виде отсутствует независимая переменная x.

Такое уравнение решается с помощью замены $y' = z(y)$, где z – функция, зависящая от «игрек». Следует отметить, что по правилу дифференцирования сложной функции: $y'' = z'(y)\cdot y' = z'(y)\cdot z(y)$, или, если короче, в дифференциальном уравнении нужно провести подстановку:

$y' = z \Rightarrow y'' = z'z$, не забывая по ходу решения, что $z' = \frac{dz}{dy}$

Встреча с такими диффурами в отчётной работе крайне маловероятна, и поэтому я воздержусь от конкретных примеров, но на всякий случай **вот ссылка** *(см. низ статьи)*.

Вы готовы к новым свершениям? Впереди ключевые уравнения!

2.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка

В рамках данного курса мы будем рассматривать уравнения с *постоянными коэффициентами*. Такое уравнение имеет вид:

$y'' + py' + qy = 0$, где p и q – конкретные числа (постоянные коэффициенты), а в правой части – **строго** ноль.

Для того чтобы решить данное ДУ, нужно составить так называемое ***характеристическое уравнение***:

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ – это обычное квадратное уравнение с двумя корнями λ_1, λ_2, которые нам нужно найти *(алгоритм я напомнил в Приложении **Школьные формулы**)*. При этом возможны три случая:

Случай первый. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет два **различных** действительных корня $\lambda_1,\ \lambda_2$ (т.е., если дискриминант $D > 0$), то *общее решение* однородного уравнения выглядит так:

$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$, где C_1, C_2 – константы.

Если один из корней равен нулю, то решение очевидным образом упрощается; пусть, например, $\lambda_1 = 0$, тогда общее решение: $y = C_1e^{0\cdot x} + C_2e^{\lambda_2 x} = C_1 + C_2e^{\lambda_2 x}$.

Пример 37

Решить дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$

Решение: составим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

и вычислим его дискриминант *(см. Приложение **Школьные формулы**)*:

$D = 1 + 8 = 9 > 0$, значит, уравнение имеет различные действительные корни.

Порядок корней не имеет значения, но обычно их располагают в порядке возрастания: $\lambda_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2,\quad \lambda_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ – **для проверки** подставляем найденные значения в квадратное уравнение и убеждаемся, что они «подходят».

Всё, что осталось сделать – записать ответ, руководствуясь формулой $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$

Ответ: общее решение: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{x}$, где $C_1, C_2 - const$

Не будет ошибкой, если записать общее решение «наоборот»: $y = C_1e^{x} + C_2e^{-2x}$, но, как я отметил выше, традиционным стилем считается расположить коэффициенты по возрастанию, сначала –2, потом 1.

Как выполнить проверку? По большому счёту, достаточно проверить квадратное уравнение, т.е. подставить значения $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$ в уравнение $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, но я напомню и **общий принцип** – найденное множество функций должно удовлетворять дифференциальному уравнению. Посмотрим, как это работает в нашем случае – берём ответ $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$ и находим производную:

$$y' = (C_1e^{-2x} + C_2e^x)' = -2C_1e^{-2x} + C_2e^x$$

Далее находим вторую производную:

$$y'' = (-2C_1e^{-2x} + C_2e^x)' = 4C_1e^{-2x} + C_2e^x$$

и подставляем $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$, $y' = -2C_1e^{-2x} + C_2e^x$ и $y'' = 4C_1e^{-2x} + C_2e^x$ **в левую часть** уравнения $y'' + y' - 2y = 0$:

$$y'' + y' - 2y = 4C_1e^{-2x} + C_2e^x + (-2C_1e^{-2x} + C_2e^x) - 2(C_1e^{-2x} + C_2e^x) =$$

$= 4C_1e^{-2x} + C_2e^x - 2C_1e^{-2x} + C_2e^x - 2C_1e^{-2x} - 2C_2e^x = 0$ – в результате получена правая часть исходного уравнения (ноль), значит, общее решение $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$ удовлетворяет уравнению $y'' + y' - 2y = 0$ и найдено правильно.

Проделанный «длинный путь» был не лишним – этот навык потребуется нам в дальнейшем, и поэтому **со всей серьёзностью** отнеситесь к следующему заданию:

Пример 38

Найти общее решение дифференциального уравнения, выполнить проверку
$y'' - 4y' = 0$

Решение и ответ в конце урока.

Случай второй. Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет два ***кратных*** (совпавших) действительных корня $\lambda_1 = \lambda_2$ (дискриминант $D = 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид:

$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2xe^{\lambda_1 x}$, где C_1, C_2 – константы. Вместо λ_1 в формуле можно нарисовать λ_2 или пару λ_1, λ_2, корни всё равно одинаковы.

Если оба корня равны нулю $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то общее решение опять же упрощается: $y = C_1e^{0\cdot x} + C_2xe^{0\cdot x} = C_1 + C_2x$. Кстати, $y = C_1 + C_2x$ является общим решением того самого примитивного уравнения $y'' = 0$. И в самом деле – его *характеристическое уравнение* $\lambda^2 = 0$ как раз и имеет совпавшие нулевые корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Кроме того, решение этого диффура можно получить двукратным интегрирование правой части:

$$y' = \int 0dx = C_1$$

$$y = C_1\int dx = C_1x + C_2$$

И это были последние интегралы в этой книге!

Пример 39

Решить дифференциальное уравнение

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

Здесь можно вычислить дискриминант, равный нулю, и найти кратные корни. Но можно невозбранно применить известную школьную формулу $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ *(которую, конечно, ещё нужно «увидеть»)*:

$(\lambda - 3)^2 = 0$ – получены два кратных действительных корня $\lambda_{1,2} = 3$

Ответ: общее решение: $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$, где $C_1, C_2 - const$

Результат можно записать и в виде $y = (C_2 x + C_1)e^{3x}$, который, кстати, удобен для **проверки**. Найдём первую производную:

$y' = ((C_2 x + C_1)e^{3x})' = C_2 e^{3x} + 3(C_2 x + C_1)e^{3x} = (3C_2 x + 3C_1 + C_2)e^{3x}$,

вторую:

$y'' = ((3C_2 x + 3C_1 + C_2)e^{3x})' = 3C_2 e^{3x} + 3(3C_2 x + 3C_1 + C_2)e^{3x} = (9C_2 x + 9C_1 + 6C_2)e^{3x}$

– обратите внимание на рациональную технику дифференцирования – часть действий можно (и на данный момент уже нужно!) выполнять устно.

Подставляем $y = (C_2 x + C_1)e^{3x}$, $y' = (3C_2 x + 3C_1 + C_2)e^{3x}$ и $y'' = (9C_2 x + 9C_1 + 6C_2)e^{3x}$ в левую часть уравнения, «собираем» всё под единой скобкой и проводим упрощения:

$y'' - 6y' + 9y = (9C_2 x + 9C_1 + 6C_2)e^{3x} - 6(3C_2 x + 3C_1 + C_2)e^{3x} + 9(C_2 x + C_1)e^{3x} =$

$= (9C_2 x + 9C_1 + 6C_2 - 18C_2 x - 18C_1 - 6C_2 + 9C_2 x + 9C_1)e^{3x} = 0 \cdot e^{3x} = 0$ – в результате получена правая часть исходного уравнения, значит, решение найдено правильно.

Пример 40

Решить дифференциальное уравнение $y'' + 2y' + y = 0$

Решаем самостоятельно.

Случай третий. Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни. Даже если вы не знаете, что такое **комплексные числа**, этот случай можно освоить чисто формально.

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет **сопряженные** комплексные корня $\lambda_1 = \alpha - \beta i$, $\lambda_2 = \alpha + \beta i$ (дискриминант $D < 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид:

$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, где C_1, C_2 – константы.

Примечание: *сопряженные комплексные корни почти всегда записывают кратко следующим образом:* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

Если получаются *чисто мнимые* сопряженные комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$, то общее решение упрощается:

Пример 41

Решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка
$y'' - 2y' + 10y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$
$D = 4 - 40 = -36$
$\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$ – получены сопряженные комплексные корни

Ответ: общее решение:

«Тягать» производные и выполнять громоздкую подстановку тут уже, конечно, не хочется *(хотя иногда приходится)*, и поэтому в качестве достаточно надежной проверки рациональнее перепроверить решение квадратного уравнения… 1-2-3 раза ☺

Аналогичный пример для самостоятельного решения:

Пример 42

Решить уравнение $y'' - 4y' + 5y = 0$

Иногда в заданиях требуется найти *частное решение*, удовлетворяющее заданным начальным условиям, то есть, решить *задачу Коши*. Алгоритм решения полностью сохраняется, но в конце задачи добавляется дополнительный пункт:

Пример 43

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$
$y'' - 4y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 4 = 0$
$(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$
$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$
Получены два различных действительных корня, поэтому общее решение:
$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$, где $C_1, C_2 - const$

Теперь нужно найти частное решение, соответствующее заданным начальным условиям. Наша задача состоит в том, чтобы **найти ТАКИЕ значения констант C_1, C_2, чтобы выполнялись ОБА условия**. Алгоритм нахождения частного решения будет отличаться от «отстрела» констант, который мы использовали ранее.

Сначала используем начальное условие $y(0) = 1$:
$y(0) = C_1 e^{-2\cdot 0} + C_2 e^{2\cdot 0} = C_1 + C_2$
Согласно начальному условию, получаем первое уравнение: $y(0) = C_1 + C_2 = 1$ или просто $C_1 + C_2 = 1$.

Далее берём наше общее решение $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$ и находим производную:

Используем второе начальное условие $y'(0) = 2$:

Согласно второму начальному условию, получаем <u>второе уравнение</u>:
$y'(0) = -2C_1 + 2C_2 = 2$ или просто $-2C_1 + 2C_2 = 2$, или ещё проще – все члены уравнения можно сразу разделить на два: $-C_1 + C_2 = 1$

Составим и решим систему из двух найденных уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

Здесь можно использовать «школьный» метод решения *(выразить в каком-нибудь уравнении одну переменную через другую и подставить её во второе уравнение)*, но удобнее провести *почленное* сложение уравнений:

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & + & C_2 & = & 1 \\ + & & + & & + \\ -C_1 & + & C_2 & = & 1 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & & 2C_2 & = & 2 \end{array}$$

из уравнения $2C_2 = 2$ находим $C_2 = 1$ и подставляем это значение в любое, например, первое уравнение системы: $C_1 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$

Всё, что осталось сделать – подставить найденные значения констант $C_1 = 0, C_2 = 1$ в общее решение $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$:

$$y = 0 \cdot e^{-2x} + 1 \cdot e^{2x} = e^{2x}$$

Ответ: частное решение: $y = e^{2x}$

Проверка осуществляется по уже знакомой схеме:

1) Сначала проверим, выполняется ли начальное условие $y(0) = 1$:
$y(0) = e^{2 \cdot 0} = 1$ – начальное условие выполнено.

2) Находим первую производную от ответа:
$y' = (e^{2x})' = 2e^{2x}$ и проверяем выполнения начального условия $y'(0) = 2$:
$y'(0) = 2e^{2 \cdot 0} = 2$ – второе начальное условие тоже выполнено.

3) Находим вторую производную: $y'' = (2e^{2x})' = 4e^{2x}$ и подставляем её вместе с $y = e^{2x}$ в левую часть исходного уравнения:
$y'' - 4y = 4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$ – в результате получена правая часть.

Вывод: частное решение найдено верно.

Пример 44

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(\pi)=-1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-4$. Выполнить проверку.

$y''+4y=0$

Это пример для самостоятельного решения, ***справочно***:
$\sin\pi=0,\quad \sin 2\pi=0,\quad \cos\pi=-1,\quad \cos 2\pi=1$

Решение и ответ в конце книги.

Как видите, особых сложностей с однородными уравнениями нет, **главное, правильно решить квадратное уравнение.**

Иногда встречаются «нестандартные» однородные уравнения, например уравнение в виде $ry''+py'+qy=0$, где при второй производной есть некоторая константа r, отличная от единицы (и, естественно, отличная от нуля). Алгоритм решения ничуть не меняется: следует невозмутимо составить характеристическое уравнение и найти его корни. Если характеристическое уравнение $r\lambda^2+p\lambda+q=0$ будет иметь два различных действительных корня, например: $\lambda_1=-\frac{1}{2}$, $\lambda_2=\frac{1}{3}$, то общее решение запишется по обычной схеме: $y=C_1e^{-\frac{x}{2}}+C_2e^{\frac{x}{3}}$, где $C_1,C_2-const$.

В ряде случаев из-за опечатки в условии или задумки автора могут получиться «нехорошие» корни, что-нибудь вроде $\lambda_1=\frac{3-\sqrt{6}}{2}$, $\lambda_2=\frac{3+\sqrt{6}}{2}$. В подобной ситуации я рекомендую **перепроверить** решение квадратного уравнения *(вдруг мы сами ошиблись?)* и в случае «подтверждения» корней спокойно записать ответ:

$$y=C_1e^{\left(\frac{3-\sqrt{6}}{2}\right)x}+C_2e^{\left(\frac{3+\sqrt{6}}{2}\right)x},\text{ где } C_1,C_2-const$$

С «плохими» сопряженными комплексными корнями наподобие $\lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}i}{2}$ тоже никаких проблем, общее решение:

$$y=e^{\frac{x}{2}}\cdot\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$$ – и не так уж «плохо» оно и выглядит ;)

То есть, **общее решение в любом случае существует**. Потому что любое квадратное уравнение имеет два корня.

И, как подсказывает интуиция, если существует **однородное** уравнение, то должно существовать и **НЕоднородное** уравнение:

2.3. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

Оно отличается ненулевой правой частью:

$y'' + py' + qy = f(x)$, где p и q, как мы оговорили ранее – постоянные коэффициенты, а $f(x)$ – функция, зависящая *только от «икс»*. В простейшем случае $f(x)$ может быть функцией-константой, *отличной от нуля*.

Какая догадка сразу приходит в голову? Неоднородное уравнение решить труднее. И интуиция нас опять не подводит!

Для решения данного диффура существует универсальный ***метод вариации произвольных постоянных***, но он отличается сложностью и громоздкостью, и поэтому на практике *(если это возможно)* обычно используют ***метод подбора***, который я и рассмотрю в рамках настоящего курса.

Алгоритм решения состоит из трёх этапов:

1) Сначала нужно **найти общее решение** соответствующего однородного уравнения. Да-да, взять уравнение $y'' + py' + qy = f(x)$, откинуть правую часть: $y'' + py' + qy = 0$ – и найти общее решение, чем мы только и занимались в предыдущем параграфе. Общее решение однородного уравнения я привык обозначать буквой Y.

2) Наиболее трудный этап. Точнее говоря, замысловатый и даже приключенческий. Необходимо **ПОДОБРАТЬ частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения**. Отсюда и название метода. Как подобрать? – об этом в практических примерах.

Внимание! *В ваших лекциях, методичках, практических занятиях общее решение однородного уравнения Y и подобранное частное решение неоднородного уравнения $\tilde{y}$,* ***скорее всего, обозначаются не так****. В частности, популярна версия:*

$y_{ОО}$ – ***о****бщее решение* ***о****днородного уравнения;*

$y_{ЧН}$ – ***ч****астное решение* ***н****еоднородного уравнения*

Я «намертво» привык к обозначениям Y, $\tilde{y}$, которые легче нарисовать, и буду использовать именно их.

3) На третьем шаге надо **составить общее решение y неоднородного уравнения**. Это совсем легко: $y = Y + \tilde{y}$. Совершенно верно – следует просто приплюсовать завоёванные трофеи.

Если изначально в условии сформулирована *задача Коши* (найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям), то добавляется четвёртый этап:

4) Нахождение частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Схема нахождения частного решения рассмотрена в *Пример 43-Пример* 44, и здесь её принципы сохраняются.

По существу, вся новизна здесь состоит в *Пункте 2*, однако хватит лирики, …какой ужас – целая страница получилась! – срочно переходим к физике:

Пример 45

Решить дифференциальное уравнение $y'' - 4y' = 8 - 16x$

Поначалу я буду нумеровать этапы **решения**:

1) Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения. Берём наш неоднородный диффур $y'' - 4y' = 8 - 16x$ и обнуляем правую часть:

$y'' - 4y' = 0$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 4\lambda = 0$

$\lambda(\lambda - 4) = 0$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4$ – получены различные действительные корни, поэтому общее решение: $Y = C_1 + C_2 e^{4x}$, где $C_1, C_2 - const$

2) Теперь нужно подобрать частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения $y'' - 4y' = 8 - 16x$

И вопрос, который вызывает затруднения чаще всего: **В каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$?**

Прежде всего, смотрим на нашу правую часть: $f(x) = 8 - 16x$. Тут у нас многочлен первой степени и по идее, частное решение тоже следует искать в виде линейного многочлена $\tilde{y} = Ax + B$, где A, B – *пока ещё* неизвестные коэффициенты (числа). То есть, нам нужно посмотреть на правую часть неоднородного уравнения и «собезьянничать» её, но уже с неопределёнными коэффициентами.

При этом степени пропускать нельзя! – даже если в правой части находится неполный многочлен. Так, если $f(x) = -16x$, то выдвигаем ту же версию $\tilde{y} = Ax + B$;

если $f(x) = 3x^2$, то …;

если $f(x) = 2x^3 - x$, то … – **во всех случаях** прописываем ВСЕ степени многочлена.

Вариант подбора, который «сразу приходит в голову», я неформально буду называть ***очевидной*** или ***первоначальной версией*** подбора. Почему первоначальной? Потому что она может измениться. А может и нет.

Теперь смотрим на нашу «заготовку» $\tilde{y} = Ax + B$ и проверяем, НЕТ ЛИ таких слагаемых в найденном общем решении $Y = C_1 + C_2 e^{4x}$? Члена вида $C_* x$ в нём нет, а вот одинокая константа – УЖЕ ЕСТЬ:

Образно говоря, в итоговом решении $Y + \tilde{y}$ это место уже занято, и одинокая буква B в «очевидном» подборе – лишняя. Поэтому ВСЮ первоначальную версию следует домножить на «икс»:

$\tilde{y} = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$

Итак, частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $\tilde{y} = Ax^2 + Bx$.

Найдем первую и вторую производную:

$\tilde{y}' = (Ax^2 + Bx)' = 2Ax + B$

$\tilde{y}'' = (2Ax + B)' = 2A$

и подставим их **в левую часть** неоднородного уравнения $y'' - 4y' = 8 - 16x$:

$\tilde{y}'' - 4\tilde{y}' = 2A - 4(2Ax + B) = 2A - 8Ax - 4B = 8 - 16x$ – после максимальных упрощений сразу приравниваем $2A - 8Ax - 4B$ **к правой части** исходного уравнения.

Теперь приравниваем коэффициенты при соответствующих степенях:

и составляем систему линейных уравнений. Уравнения обычно записывают в порядке убывания степеней, в данном случае – начиная с «иксовых» коэффициентов:

$$\begin{cases} -8A = -16 \\ 2A - 4B = 8 \end{cases}$$

Система получилась устная, и из неё следует, что $A = 2,\ B = -1$ – подставляем найденные коэффициенты в «заготовку» $\tilde{y} = Ax^2 + Bx$:

$\tilde{y} = 2x^2 - x$ частное решение неоднородно уравнения.

3) Запишем общее решение неоднородного уравнения:

$y = Y + \tilde{y} = C_1 + C_2 e^{4x} + 2x^2 - x,$ где $C_1, C_2 - const$

Ответ: общее решение: $y = C_1 + C_2 e^{4x} + 2x^2 - x,$ где $C_1, C_2 - const$

Ещё перед записью общего решения (пунктом 3) целесообразно провести «быструю» проверку. Сначала проверяем, правильно ли мы решили квадратное уравнение, после чего первая часть ответа $C_1 + C_2 e^{4x}$ *(общее решение однородного уравнения)* будет гарантировано правильной.

Осталось проверить, верно ли найдена вторая часть ответа *(подобранное частное решение)* $\tilde{y} = 2x^2 - x$. Это тоже просто. Берём первую и вторую производную:

$\tilde{y}' = 4x - 1,\quad \tilde{y}'' = 4$ и подставляем их в левую часть исходного уравнения $y'' - 4y' = 8 - 16x$:

$\tilde{y}'' - 4\tilde{y}' = 4 - 4(4x - 1) = 4 - 16x + 4 = 8 - 16x$ – в результате получена правая часть уравнения, значит, частное решение подобрано верно.

Тренируемся самостоятельно!

Пример 46

Решить дифференциальные уравнения

а) $y'' + 2y' + 3y = 4$, б) $y'' - 4y = 8x^3$

Здесь в явном виде присутствует функция «игрек» и в ходе подбора частного решения, помимо производных $\tilde{y}', \tilde{y}''$, в левую часть нужно подставлять и сам подбор $\tilde{y}$.

Если возникла какая-то загвоздка – не теряйте времени и сверяйтесь с образцом, который я постарался расписать максимально подробно.

Перейдём к рассмотрению, может быть, самого распространенного случая – когда в правой части находится экспонента:

Пример 47

Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения
$y''-6y'+10y=51e^{-x}$

Решение начинается стандартно:

1) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:
$y''-6y'+10y=0$

Составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2-6\lambda+10=0$
$D=36-40=-4$
$\lambda_{1,2}=\dfrac{6\pm 2i}{2}=3\pm i$ – получены сопряженные комплексные корни, которые лучше незамедлительно проверить. Опытные читатели могут подставить их в характеристическое уравнение, но более лёгкий способ – это просто ВНИМАТЕЛЬНО его перепроверить. Чтобы в общем решении наверняка не было ошибок:
$Y=e^{3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

2) На втором шаге выполняем подбор частного решения $\tilde{y}$ неоднородного уравнения $y''-6y'+10y=51e^{-x}$.

Сначала выясним, в каком виде его нужно искать. Смотрим на правую часть уравнения и выдвигаем первоначальную гипотезу: раз в правой части находится экспонента, умноженная на константу: $51e^{-x}$ – то частное решение, по идее, нужно искать в «родственном» виде $\tilde{y}=Ae^{-x}$, где A – *пока ещё* неизвестный коэффициент.

Теперь смотрим на общее решение $Y=e^{3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$ – в нём НЕТ слагаемого $C_* e^{-x}$, а значит, первоначальную версию $\tilde{y}=Ae^{-x}$ домножать на «икс» НЕ НУЖНО и она принимается в качестве «рабочей» версии.

Найдём производные, они здесь простецкие:
$\tilde{y}'=(Ae^{-x})'=-Ae^{-x}$
$\tilde{y}''=(-Ae^{-x})'=Ae^{-x}$

и подставим $\tilde{y}=Ae^{-x}$, $\tilde{y}'=-Ae^{-x}$ и $\tilde{y}''=(-Ae^{-x})'=Ae^{-x}$ в левую часть неоднородного уравнения $y''-6y'+10y=51e^{-x}$:

$\tilde{y}''-6\tilde{y}'+10\tilde{y}=Ae^{-x}+6Ae^{-x}+\ldots$ – после упрощений приравниваем результат к правой части неоднородного уравнения.

Из последнего равенства $17A=51$ следует, что $A=3$. Таким образом, у нас нарисовалось частное решение $\tilde{y}=3e^{-x}$, которое тоже лучше сразу же проверить:

Подставим $\tilde{y}=3e^{-x}$ с очевидными производными $\tilde{y}'=-3e^{-x}$, $\tilde{y}''=3e^{-x}$ в левую часть исходного уравнения $y''-6y'+10y=51e^{-x}$:

$\tilde{y}''-6\tilde{y}'+10\tilde{y}=3e^{-x}-6(-3e^{-x})+10\cdot 3e^{-x}=3e^{-x}+18e^{-x}+30e^{-x}=51e^{-x}$ – получена правая часть уравнения, значит, частное решение найдено правильно.

3) Осталось с лёгким сердцем записать итоговый результат:
$y=Y+\tilde{y}=(C_1\cos x+C_2\sin x)+3e^{-x}$

Ответ: обще решение: $y=(C_1\cos x+C_2\sin x)+3e^{-x}$, где $C_1,C_2-const$

Следующий пример для самостоятельного решения:

Пример 48

$y''-7y'+12y=3e^{4x}$

В случае затруднений сверяйтесь с образцом в конце книги. После чего рассмотрим ещё одну классику жанра:

Пример 49

Решить дифференциальное уравнение
$y''-6y'+9y=e^{3x}$

Алгоритм **решения** сохраняется, но в конце добавляется дополнительный пункт.
И добавляется ещё кое-что ;)

1) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:
$y''-6y'+9y=0$
$\lambda^2-6\lambda+9=0$

Как раз тот случай «озарения» по формуле $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$:
$(\lambda-3)^2=0$
$\lambda_{1,2}=3$ – получены кратные действительные корни, поэтому общее решение:
$Y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$

2) Выясняем, в каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$. Смотрим на правую часть неоднородного уравнения $y''-6y'+9y=e^{3x}$, после чего сразу появляется первая версия подбора: $\tilde{y}=Ae^{3x}$. Но в общем решении Y **уже есть** такое слагаемое: C_1e^{3x}, поэтому нашу версию нужно умножить на «икс»: $\tilde{y}=x\cdot Ae^{3x}=Axe^{3x}$ – однако и такое слагаемое ТОЖЕ ЕСТЬ в общем решении: C_2xe^{3x}.

Что делать? Всё гениальное просто – **ещё раз домножаем** нашу «заготовку» на «икс» и ищем решение в виде $\tilde{y}=x\cdot Axe^{3x}=Ax^2e^{3x}$ – такого слагаемого в общем решении $Y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$ уже нет, и, образно говоря, в «общем вагоне» $Y+\tilde{y}$ это место свободно.

Надеюсь, все уже приноровились применять правило $(uv)' = u'v + uv'$ устно:

$\tilde{y}' = (Ax^2e^{3x})' = 2Axe^{3x} + 3Ax^2e^{3x} = (3Ax^2 + 2Ax)e^{3x}$

$\tilde{y}'' = ((3Ax^2 + 2Ax)e^{3x})' = (6Ax + 2A)e^{3x} + ...$

Подставим $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в левую часть исходного уравнения $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ и максимально упростим выражение:

$\tilde{y}'' - 6\tilde{y}' + 9\tilde{y} = (9Ax^2 + 12Ax + 2A)e^{3x} - 6(3Ax^2 + 2Ax)e^{3x} + 9Ax^2e^{3x} =$

$= (9Ax^2 + 12Ax + ... - 12Ax + 9Ax^2) \cdot e^{3x} = 2Ae^{3x} = e^{3x}$ – после упрощений приравниваем результат к правой части.

Из последнего равенства $2Ae^{3x} = e^{3x}$ следует, что:

$2A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$ – подставляем найденное значение в подбор $\tilde{y} = Ax^2e^{3x}$:

$\tilde{y} = \frac{1}{2}x^2e^{3x}$. Ну а проверка нас пока подождёт ;)

Возможно, у вас возник вопрос: *а что произойдет, если мы будем искать частное решение в некорректном виде?* Вот только что мы его искали в виде $\tilde{y} = Ax^2e^{3x}$, а что будет, если попробовать искать частное решение в «первоначальном» виде $\tilde{y} = Ae^{3x}$?

Поначалу всё будет хорошо: удастся найти производные $\tilde{y}', \tilde{y}''$, провести подстановку. Но далее перед глазами возникнет грустный факт: у нас не получится красивого финального равенства $2Ae^{3x} = e^{3x}$, грубо говоря, «ничего не сойдётся»:

$\tilde{y} = Ae^{3x}$

$\tilde{y}' = 3Ae^{3x}$

$\tilde{y}'' = 9Ae^{3x}$

подставляем эти штуки в левую часть диффура:

$\tilde{y}'' - 6\tilde{y}' + 9\tilde{y} = 9Ae^{3x} - 6 \cdot 3Ae^{3x} + 9Ae^{3x} = 0$ – после чего сократилось вообще ВСЁ, и поэтому в конце мы не можем приписать правую часть неоднородного уравнения, ибо:

$0 \neq e^{3x}$

Таким образом, попытка подобрать частное решение в виде $\tilde{y} = Ae^{3x}$ не увенчалась успехом.

И если вам встретится (или уже встретился) подобный казус, **то знайте** – вы изначально пытались подобрать частное решение НЕ В ТОМ виде.

Собираем камни:

3) $y = Y + \tilde{y} = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x}$ – общее решение неоднородного уравнения, которое можно записать более стильно:

Ответ: $y = \left(\frac{x^2}{2} + C_2x + C_1\right)e^{3x}$, где $C_1, C_2 - const$

Прямо таки маленькое математическое событие под названием «Воссоединение членов многочлена» =)

Переходим к следующему типовому случаю и заодно вспомним *задачу Коши*:

Пример 50

Найти частное решение уравнения $y''+4y=xe^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=-\frac{1}{16}$, $y'(0)=2$

Решение начинается тривиально. Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения:

$y''+4y=0$

$\lambda^2+4=0$

$\lambda_{1,2}=\pm 2i$ – получены сопряженные, *чисто мнимые* комплексные корни, поэтому общее решение:

$Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

Подбираем частное решение $\tilde{y}$. Поскольку в правой части неоднородного уравнения $y''+4y=xe^{2x}$ находится многочлен 1-й степени, умноженный на экспоненту, то в качестве первоначальной версии подбора рассматриваем $\tilde{y}=(Ax+B)e^{2x}$,

при этом степени многочлена пропускать нельзя! *(в нашем случае – константу)*
То есть, если в правой части ДУ находится неполный многочлен, например, $f(x)=(x^2+1)e^{-x}$, то в подборе **всё равно** прописываем <u>все</u> его степени:
$\tilde{y}=(Ax^2+Bx+C)e^{-x}$

Теперь смотрим на нашу «заготовку» $\tilde{y}=Axe^{2x}+Be^{2x}$ и на общее решение $Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$. В общем решении НЕТ слагаемых вида C_*e^{2x} и C_*xe^{2x}, и поэтому домножать $\tilde{y}=(Ax+B)e^{2x}$ на «икс» НЕ НАДО. Таким образом, первоначальная версия подбора принимается в качестве рабочего варианта.

Найдём производные:

$\tilde{y}'=((Ax+B)e^{2x})'=Ae^{2x}+2(Ax+B)e^{2x}=(2Ax+A+2B)e^{2x}$

$\tilde{y}''=((2Ax+A+2B)e^{2x})'=2Ae^{2x}+\ldots$

И подставим $\tilde{y}$ и $\tilde{y}''$ в левую часть неоднородного уравнения:

$\tilde{y}''+4\tilde{y}=(4Ax+4A+4B)e^{2x}+4(Ax+B)e^{2x}=$

$=(4Ax+4A+4B+4Ax+4B)e^{2x}=(8Ax+4A+8B)e^{2x}=(x+0)e^{2x}$ – после максимальных упрощений приравниваем результат к правой части. Обращаю ваше внимание, что **отсутствующие коэффициенты многочлена правой части равны нулю.**

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях и составляем систему:

$\begin{cases} 8A=1 \\ 4A+8B=0 \end{cases}$, из которой следует, что $A=\frac{1}{8} \Rightarrow 4\cdot\frac{1}{8}+8B=0 \Rightarrow B=-\frac{1}{16}$

Таким образом: $\tilde{y}=(Ax+B)e^{2x}=\left(\frac{x}{8}-\frac{1}{16}\right)e^{2x}$

3) Запишем общее решение:

$$y = Y + \tilde{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right)e^{2x}, \text{ где } C_1, C_2 - const$$

4) Найдём частное решение, соответствующее заданным начальным условиям.

Сначала применяем к общему решению начальное условие $y(0) = -\frac{1}{16}$:

$y(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + \left(\frac{0}{8} - \frac{1}{16}\right)e^0 = C_1 - \frac{1}{16} = -\frac{1}{16}$, откуда сразу получаем $C_1 = 0$.

Далее находим производную: и применяем к ней второе начальное условие $y'(0) = 2$:

$$y'(0) = -2C_1 \cdot 0 + 2C_2 \cdot 1 + \frac{1}{8}e^0 + 2\left(\frac{0}{8} - \frac{1}{16}\right)e^0 = 2C_2 + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 2C_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1$$

Надо сказать, с константами тут повезло – отыскались сразу. Чаще приходится составлять и решать систему двух уравнений. Ну а в том, что пришлось иметь дело с дробями, нет ничего необычного – это, скорее, обычное дело ☺

Ответ: частное решение: $y = \sin 2x + \left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right)e^{2x}$

Выполним **полную проверку**. Сначала проверяем, выполняется ли начальное условие $y(0) = -\frac{1}{16}$:

$y(0) = \sin 0 + \left(\frac{0}{8} - \frac{1}{16}\right) \cdot e^0 = 0 - \frac{1}{16} = -\frac{1}{16}$ – да, начальное условие выполнено.

Находим производную от ответа: $y' = 2\cos 2x + \frac{1}{8}e^{2x} + 2\left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right)e^{2x} = 2\cos 2x + \frac{x}{4}e^{2x}$

и проверяем, выполняется ли начальное условие $y'(0) = 2$:

$y'(0) = 2 \cdot 1 + 0 = 2$ – да, второе начальное условие тоже выполнено.

Берём вторую производную: $y'' = -4\sin 2x + \frac{1}{4}e^{2x} + 2 \cdot \frac{x}{4}e^{2x} = -4\sin 2x + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2x}$ и

подставляем её вместе с $y = \sin 2x + \left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right)e^{2x}$ в левую часть исходного уравнения:

$$y'' + 4y = -4\sin 2x + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2x} + 4 \cdot \left[\sin 2x + \left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right)e^{2x}\right] =$$

$$= -4\sin 2x + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2x} + 4\sin 2x + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x} = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x} = xe^{2x}$$ – в результате получена правая часть, в чём и требовалось убедиться.

Аналогично можно выполнить полную проверку любого общего решения с той лишь разницей, что не нужно проверять выполнение начальных условий. Но гораздо проще, конечно, «быстрая» проверка или, как я её жаргонно называю, проверка-«лайт».

Обязательно прорешиваем и во всём разбираемся:

Пример 51

Решить задачу Коши, выполнить проверку
$y''+2y'=(4-4x)e^{-2x}, \quad y(0)=1,\ y'(0)=-1$

Образец я приблизил к чистовому варианту – примерно так нужно оформлять задачу. Не забываем о минимальных словесных комментариях, в которых, к слову, совсем не обязательно обосновывать вид, в котором вы подбираете частное решение $\tilde{y}$.

И в заключение параграфа рассмотрим не менее важные уравнения с тригонометрическими функциями в правой части:

Пример 52

$y''-2y'+5y=21\cos 2x-\sin 2x$

Решение: найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:
$y''-2y'+5y=0$
Характеристическое уравнение:
$\lambda^2-2\lambda+5=0$
$D=4-20=-16$
$\lambda_{1,2}=\dfrac{2\pm 4i}{2}$
$\lambda_{1,2}=1\pm 2i$ – получены сопряженные комплексные корни, поэтому общее решение:
$Y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$ – **внимательно перепроверяем квадратное уравнение**, и убеждаемся, что ошибок мы не допустили.

Теперь подбираем частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения $y''-2y'+5y=21\cos 2x-\sin 2x$.

Правило: если в правой части находится сумма синуса и косинуса одного и того же аргумента *(в нашем случае аргумента $2x$)*, ИЛИ одинокий косинус *(например, $10\cos 2x$ и больше ничего)*, ИЛИ одинокий синус *(например, $3\sin 2x$ и больше ничего)*, то **во всех трёх случаях** в качестве первоначального варианта подбора рассматриваем сумму косинуса и синуса *(того же аргумента!)* с двумя неопределенными коэффициентами. В нашей задаче:
$\tilde{y}=A\cos 2x+B\sin 2x$, где A и B – пока ёще неизвестные коэффициенты.

Теперь смотрим на общее решение $Y=C_1e^x\cos 2x+C_2e^x\sin 2x$, в котором для наглядности раскрыты скобки. В общем решении НЕТ слагаемых вида $C_*\cos 2x, C_{**}\sin 2x$, а значит, первоначальную версию $\tilde{y}=A\cos 2x+B\sin 2x$ домножать на «икс» **не нужно** и она принимается в качестве рабочего варианта.

Найдем производные:
$\tilde{y}'=(A\cos 2x+B\sin 2x)'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x$
$\tilde{y}''=(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)'=-4A\cos 2x-4B\sin 2x$

Подставим $\tilde{y}, \tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в левую часть неоднородного уравнения
$y''-2y'+5y=21\cos 2x-\sin 2x$:

$\tilde{y}''-2\tilde{y}'+5\tilde{y}=$

$=-4A\cos 2x-4B\sin 2x-2(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)+5(A\cos 2x+B\sin 2x)=$

раскрываем скобки:

$=-4A\cos 2x-4B\sin 2x+4A\sin 2x-4B\cos 2x+5A\cos 2x+5B\sin 2x=$

группируем слагаемые при косинусе и синусе:

$=(-4A-...+5A)\cos 2x+...=$

$=(A-4B)\cos 2x+(4A+B)\sin 2x=21\cos 2x-\sin 2x$ – и после упрощений в скобках приравниваем результат к правой части неоднородного уравнения.

В последнем равенстве приравниваем коэффициенты при *соответствующих тригонометрических функциях* и получаем систему:

$$\begin{cases} A-4B=21 \\ 4A+B=-1 \end{cases}$$

Систему не возбраняется решить «школьным» методом *(выразить, например, из второго уравнения $B=-4A-1$ – и подставить в первое уравнение)*, но чаще их решают «вышматовским» способом. Умножим второе уравнение на 4 и выполним почленное сложение:

$$\begin{cases} A-4B=21 \\ 16A+4B=-4 \end{cases} + \quad \Rightarrow 17A=14 \Rightarrow A=1$$ – подставим в любое, например, первое уравнение:

$1-4B=21$

$-4B=20 \Rightarrow B=-5$, после чего подставляем найдённые значения A и B в наш подбор: $\tilde{y}=A\cos 2x+B\sin 2x=\cos 2x-5\sin 2x$ – искомое частное решение.

Выполним «быструю» проверку, а именно, найдём производные:

$\tilde{y}'=(\cos 2x-5\sin 2x)'=-2\sin 2x-10\cos 2x$

$\tilde{y}''=(-2\sin 2x-10\cos 2x)'=-4\cos 2x+20\sin 2x$

и подставим их вместе с $\tilde{y}=\cos 2x-5\sin 2x$ в левую часть исходного уравнения:

$\tilde{y}''-2\tilde{y}'+5\tilde{y}=$

$=-4\cos 2x+20\sin 2x-2(-2\sin 2x-10\cos 2x)+5(\cos 2x-5\sin 2x)=$

$=-4\cos 2x+20\sin 2x+4\sin 2x+20\cos 2x+5\cos 2x-25\sin 2x=$

$=21\cos 2x-\sin 2x$ – надо просто быть упрямым и уметь ~~играть на скрипке~~ дифференцировать =)

После чего мы практически стопроцентно можем быть уверены в правильности итогового результата: $y=Y+\tilde{y}=e^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\cos 2x-5\sin 2x$ – общее решение неоднородного уравнения.

Ответ: $y=e^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\cos 2x-5\sin 2x,$ где $C_1, C_2-const$

Простенькое уравнение для самостоятельного решения:

Пример 53

$y''+y=2\cos x$

И некоторые более редкие случаи я разберу в обзорном порядке:
$y''+9y=2x\sin 3x$

Правило: если в правой части находится синус, умноженный на многочлен ИЛИ косинус *(того же аргумента)*, умноженный на многочлен той же степени *(например,* $(1-x)\cos 3x$*)*, ИЛИ их сумма, то **во всех трёх случаях** в качестве первоначального варианта подбора рассматриваем «полный набор», в нашем случае:
$\tilde{y}=(Ax+B)\cos 3x+(Cx+D)\sin 3x$, где A, B, C, D пока ёще неизвестные коэффициенты, **при этом степени неопределённых многочленов пропускать нельзя!**

Далее. Поскольку в общем решении $Y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$ демонстрационного уравнения **уже есть** члены вида $B\cos 3x,\ D\sin 3x$, то ВСЮ первоначальную версию подбора следует домножить на «икс»:
$$\tilde{y}=x\cdot\left((Ax+B)\cos 3x+(Cx+D)\sin 3x\right)=(Ax^2+Bx)\cos 3x+(Cx^2+Dx)\sin 3x$$

Другой случай – когда в правой части находится экспонента, умноженная на тригонометрическую функцию, например:
$y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$

Правило: если в правой части находится такое произведение ИЛИ произведение этой же экспоненты на косинус такого же аргумента *(например,* $-3e^x\cos 2x$*)*, ИЛИ ЖЕ сумма таких слагаемых (например, $2e^x\cos 2x-e^x\sin 2x=e^x(2\cos 2x-\sin 2x)$), то **во всех трёх случаях** первоначальная версия подбора имеет вид:
$\tilde{y}=e^x(A\cos 2x+B\sin 2x)$

Следует отметить, что уже здесь нам «светит» нахождение громоздких производных $\tilde{y}',\tilde{y}''$ и весёлая подстановка. Однако это ещё половина счастья. В общем решении $Y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$ нашего уравнения **уже есть** слагаемое вида $\tilde{y}=Ae^x\cos 2x$, и поэтому ВСЯ «заготовка» подбора подлежит домножению на «икс»:
$$\tilde{y}=x\cdot e^x(A\cos 2x+B\sin 2x)=e^x(Ax\cos 2x+Bx\sin 2x)$$

Но такая жесть, конечно, встречается совсем редко. Впрочем, и она нипочём – с хорошими навыками интегрирования и повышенным уровнем внимания.

Иногда в правой части неоднородного уравнения находится «ассорти», например:
$y''+9y=-18\sin 3x-18e^{3x}$

В подобных случаях частное решение неоднородного уравнения удобно разделить на две части: и провернуть алгоритм дважды – для подбора $\tilde{y}_1=Ax\cos 3x+Bx\sin 3x$ и для $\tilde{y}_2=Ce^{3x}$, после чего просуммировать найденные решения.

Как быть если в правой части находится какая-либо функция другого вида? Если это гиперболический синус или косинус, то раскладываем их на экспоненты; в других же случаях применяют универсальный **метод вариации произвольных постоянных**, но такое задание ввиду его громоздкости вряд ли предложат в вашей отчётной работе.

2.4. Коротко о линейных уравнениях более высоких порядков

Всё очень и очень похоже. Они тоже бывают однородные и неоднородные. Так, *линейное однородное* ДУ 3-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$y''' + ry'' + py' + qy = 0$, где r, p, q – конкретные числа.

Для данного уравнения тоже нужно составить характеристическое уравнение и уравнение и найти его корни. Характеристическое уравнение, как нетрудно догадаться, выглядит так:

$\lambda^3 + r\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, и оно <u>в любом случае</u> имеет **ровно три** корня.

Пусть, например, все корни действительны и различны: $\lambda_1 = -3;\ \lambda_2 = 1;\ \lambda_3 = 5$, тогда общее решение запишется следующим образом:

$y = C_1e^{-3x} + C_2e^{x} + C_3e^{5x},$ где $C_1, C_2, C_3 - const$

Если один корень действительный $\lambda_1 = 2$, а два других – сопряженные комплексные $\lambda_{2,3} = \sqrt{3} \pm 5i$, то общее решение записываем так:

$y = ... + e^{\sqrt{3}x}(C_2\cos 5x + ...,$ где $C_1, C_2, C_3 - const$

Особый случай, когда все три корня кратны (одинаковы). Знакомый малыш $y''' = 0$ имеет характеристическое уравнение $\lambda^3 = 0$ с тремя совпавшими нулевыми корнями $\lambda_{1,2,3} = 0$, поэтому его общее решение записываем так:

$y = C_1 + C_2x + C_3x^2,$ где $C_1, C_2, C_3 - const$

Если характеристическое уравнение $\lambda^3 + r\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет, например, три кратных корня $\lambda_{1,2,3} = -1$, то общее решение, соответственно, такое:

$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + ...,$ *где* $C_1, C_2, C_3 - const$

Оформим решение «цивилизованно»:

<u>Пример 54</u>

Решить однородное дифференциальное уравнение третьего порядка $y''' + y' = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^3 + \lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$

$\lambda_1 = 0,\ \ \lambda_{2,3} = \pm i$ – получен один действительный корень и два сопряженных комплексных корня.

Ответ: общее решение $y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x,$ где $C_1, C_2, C_3 - const$

Подобные уравнения вполне могут быть предложены для решения, и поэтому мы немного разовьём тему:

Линейное однородное уравнение 4-го порядка с постоянными коэффициентами s, r, p, q имеет вид:

$$y^{IV} + sy''' + ry'' + py' + qy = 0$$

и соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^4 + s\lambda^3 + r\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ всегда имеет **ровно четыре** корня.

Общее решение записывается точно по таким же принципам, как и для однородных диффуров младших порядков. Единственное, закомментирую тот случай, когда все 4 корня являются кратными. Если они равны нулю, то это в точности тривиальное уравнение $y^{IV} = 0$ с общим решением:

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3, \text{ где } C_1, C_2, C_3, C_4 - const$$

Если, характеристическое уравнение имеет четыре одинаковых ненулевых корня, например, $\lambda_{1,2,3,4} = 3$, то общее решение запишется так:

$$y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + ..., \text{ где } C_1, C_2, C_3, C_4 - const.$$

Пример 55

Решить уравнения

а) $y^{IV} - 4y = 0$, б) да чего тут мелочиться, сразу 6-го порядка: $y^{VI} - y^{V} = 0$

Догадайтесь самостоятельно! И да, потренируйтесь в проверке, она, кстати, помогает в сомнительных случаях. Решения и ответы в конце книги.

Линейное НЕоднородное уравнение 3-го и более высоких порядков отличается, как легко догадаться, ненулевой правой частью $f(x)$ и его **алгоритм решения будет точно таким же, как и для уравнений второго порядка**. С той поправкой, что нам придётся находить бОльшее количество производных при подборе частного решения $\tilde{y}$ и при проверке. Фанаты могут ознакомиться с соответствующей статьёй сайта, но это уже диффуры «третьей категории» важности.

Да уж, действительно коротко получилось, даже сам удивился….

И я вас поздравляю!
Теперь вы сможете решить почти любое ДУ вашей отчётной работы!

Более подробную информацию и дополнительные примеры можно найти в соответствующем разделе портала mathprofi.ru *(ссылка на карту сайта)*, при этом следующим пунктом целесообразно изучить **системы дифференциальных уравнений** *(если они есть в вашей учебной программе)*.

Из прикладной литературы рекомендую следующий **решебник**:

М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко Дифференциальные уравнения, где разобраны более редкие уравнения и методы решения, которых вообще нет на сайте.

Желаю успехов!

Решения и ответы

Пример 4. Решение: *Найдем общее решение. Разделяем переменные:*

Интегрируем:

Общий интеграл получен, пытаемся его упростить. Упаковываем логарифмы и избавляемся от них:

Выражаем функцию в явном виде, используя:
– общее решение.

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию.
Способ первый, вместо «икса» подставляем 1, вместо «игрека» – «е»:
.

Способ второй:

Подставляем найденное значение константы в общее решение.

Ответ: *частное решение:*

Выполним проверку. *Сначала проверяем, действительно ли выполняется начальное условие:*
– да, начальное условие выполнено.

Теперь проверим, удовлетворяет ли вообще частное решение дифференциальному уравнению. Находим производную:

Подставим полученное частное решение и найденную производную в исходное уравнение:

Получено верное равенство, таким образом, решение найдено правильно.

Пример 6. Решение: *Данное уравнение допускает разделение переменных. Разделяем переменные и интегрируем:*

Ответ: *общий интеграл:*

Примечание: *тут можно получить и общее решение:*

Но, согласно моему третьему техническому совету, делать это нежелательно, поскольку такой ответ смотрится плохо.

***Пример 8*. *Решение*: данное ДУ допускает разделение переменных:**

Интегрируем:

Общий интеграл:

Найдем частное решение (частный интеграл), соответствующий заданному начальному условию. Подставляем в общий интеграл и:

***Ответ*:**

***Пример 9*.**

*а) **Решение**: данное уравнение допускает разделение переменных:*

Левую часть интегрируем по частям:

В интеграле правой части проведем замену:

Таким образом:

Дробь правой части раскладывается в сумму методом неопределенных коэффициентов, но она настолько проста, что подбор коэффициентов можно выполнить и устно:

Обратная замена:

***Ответ**: общий интеграл:*

*б) **Решение**: разделяем переменные и интегрируем:*

Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

***Примечание**: интеграл можно было также найти методом выделения полного квадрата*

Ответ: *общее решение:*

Пример 11*. *Решение*:** *проверим уравнение на однородность, для этого в исходное уравнение* ***вместо *подставим, а* ***вместо*** *подставим:*

В результате получено исходное уравнение, значит, данное ДУ является однородным.

Проведем замену: – подставим в исходное уравнение и проведём максимальные упрощения:

Разделяем переменные и интегрируем:

Перед обратной заменой результат целесообразно упростить:

Обратная замена:

Под корнем приведём слагаемые к общему знаменателю и вынесем из-под корня всё, что можно. Эти действия часто приходится выполнять в ходе решения однородного уравнения, запомните их:

Ответ: *общий интеграл:*

***Пример 14*.**

а) ***Решение***: *данное уравнение является однородным, проведем замену:*

После подстановки проводим максимальные упрощения:

Разделяем переменные и интегрируем:

Контроль потенциально потерянных решений:
– не является решением уравнения,
а вот, очевидно, является.

Интегрируем:

и перед обратной заменой записываем уравнение как можно компактнее:

Проведём обратную замену:

Решение в общий интеграл не вошло, и поэтому его следует дополнительно прописать в ***ответе:***

общий интеграл:, ещё одно решение:.

Дополнительное задание*: найдём частное решение, соответствующее заданному начальному условию:*

– искомый частный интеграл.

Выполним проверку:

1) Проверяем выполнение начального условия:

– получено верное равенство, т.е. начальное условие выполняется.

2) Найдём производную:

– в результате получено исходное дифференциальное уравнение.

Таким образом, решение найдено верно.

б) ***Решение****: разделим обе части уравнения на:*

, при этом не является решением исходного уравнения, поэтому корней мы точно не потеряем.

Проведем замену и максимально упростим уравнение:

Разделяем переменные, слева собираем «тэ», справа – «иксы»:

Контроль потенциально потерянных решений*:*

Первая функция, очевидно, является решением уравнения, проверяем вторую подстановкой и её производной:

– получено верное равенство, значит, функция является решением.

Интегрируем:

умножим обе части на 2:

переобозначим константу через:

и «упаковываем» логарифмы:

Обратная замена:

Умножим все слагаемые на:

Решения вошли в общий интеграл при нулевом значении константы.

Ответ*: общий интеграл:*

Проверка*: дифференцируем общий интеграл:*

Получено исходное дифференциальное уравнение, значит, решение найдено верно.

Пример 17*. *Решение: *Данное уравнение является линейным неоднородным, проведем замену:*

Составим и решим систему:

Из первого уравнения найдем:

– подставим во второе уравнение системы:

Таким образом:

***Ответ**: общее решение:.*

***Проверка**: подставим и в левую часть исходного уравнения:*

– в результате получена правая часть уравнения, значит, решение найдено верно.

Пример 19*. *Решение: *Данное уравнение является линейным неоднородным, проведём замену:*

Составим и решим систему:
.

Из первого уравнения найдем:

– подставим во второе уравнение системы:

Таким образом, общее решение:

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию:

Ответ:

Пример 21*. *Решение: *Данное уравнение является линейным неоднородным, проведём замену:*

(раскрыли только левые скобки!)

Составим и решим систему:

.

Из первого уравнения найдем:

Примечание: *здесь использовано основное логарифмическое тождество:*
Подставим найденную функцию во второе уравнение:

Таким образом, общее решение:

Найдем частное, соответствующее заданному начальному условию:

Ответ:

Пример 23*. *Решение: *представим уравнение в виде.*
Данное ДУ является уравнением Бернулли, разделим обе части на:

Проведем замену :

Получено линейное неоднородное уравнение, проведем замену:

Составим и решим систему:

Из первого уравнения найдем:

– подставим во второе уравнение:

Таким образом:

Обратная замена:
Общее решение:

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию:

Ответ:

Пример 25*. *Решение: *Данное уравнение является уравнением Бернулли. Разделим обе части на*:

Очевидно, что является решением данного уравнения.

Проведём замену:

Полученное линейное неоднородное уравнение решим методом вариации произвольной постоянной:

1) Найдём общее решение соответствующего линейного однородного уравнения:

2) В неоднородном уравнении проведём замену:

Таким образом:

Обратная замена:

Ответ: *общий интеграл:, ещё одно решение:*

Пример 28*. *Решение: *проверим, является ли данное ДУ уравнением в полным дифференциалах:*

, значит, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах и имеет вид:

, в нашем случае:

Если, то:

– подставляем в.

Ответ: *общий интеграл:*

Проверка*. Найдём частные производные:*

и составим дифференциальное уравнение:

В результате получено исходное ДУ, значит, решение найдено правильно.

Пример 30*. *Решение: *проверим, является ли данное ДУ уравнением в полным дифференциалах:*

, значит, данное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах и имеет вид:

Способ первый:
–.работаем с этой производной,
– про эту производную пока забываем.

Так как, то:

Дифференцируем по и приравниваем результат к «забытой» производной:

Преобразуем правую часть с помощью формулы:

Восстанавливаем функцию:
– и подставляем её в

Ответ: *общий интеграл*

Способ второй:
– про эту производную пока забываем.
– будем работать с этой производной.

Если, то:

Найдём частную производную по и приравняем её к «забытой» производной:

Из последнего равенства следует, что:
– подставляем в «недостроенную» функцию.

Ответ: *общий интеграл.*

Вопрос: *какой способ проще?*

Пример 32. Решение:

а) *Дважды интегрируем правую часть:*

Ответ*:*

б) *Преобразуем уравнение:. Данное ДУ имеет вид. Дважды интегрируем правую часть:*

Ответ: *общее решение:*

в) *Трижды интегрируем правую часть:*

Ответ*: общее решение:*

Пример 34. Решение: *Преобразуем уравнение:*
Данное уравнение имеет вид. Трижды интегрируем правую часть:

В соответствии с начальным условием:

В соответствии с начальным условием:

В соответствии с начальным условием:

Ответ: *частное решение:*

Пример 36*. *Решение: *В данном уравнении в явном виде не участвуют функция и первая производная. Проведём замену:*

Если, то

Таким образом, уравнение понижено до первого порядка:

В результате получено уравнение с разделяющимися переменными, разделяем переменные и интегрируем:

Проведём обратную замену:

Данное уравнение имеет вид:.

Дважды интегрируем правую часть:

Ответ: *общее решение:*

Пример 38*. *Решение: *составим и решим характеристическое уравнение:*

, – различные действительные корни
Ответ: *общее решение:*

***Проверка**: найдем производные, и подставим их в левую часть исходного уравнения:*
– в результате получена правая часть , таким образом, общее решение найдено правильно.

Пример 40*. *Решение: *составим и решим характеристическое уравнение:*

Получены два кратных действительных корня

Ответ: *общее решение:*

Пример 42*. *Решение: *Составим и решим характеристическое уравнение:*

– сопряженные комплексные корни

Ответ: *общее решение:*

Пример 44*. *Решение: *Составим и решим характеристическое уравнение:*

– получены сопряженные комплексные корни, поэтому общее решение:

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:
, то есть, (значение константы получилось сразу же).

То есть.
Ответ: *частное решение:*

Проверка*: – начальное условие выполнено.*

– второе начальное условие выполнено.

Подставим и в левую часть исходного уравнения:

Получена правая часть исходного уравнения (ноль).

Такие образом, частное решение найдено верно.

***Пример 46*. Решение:**

а) *1) Найдём обще решение соответствующего однородного уравнения:*

Составим и решим характеристическое уравнение:

– получены сопряженные комплексные корни, таким образом:

2) Подберём частное решение неоднородного уравнения. Так как правая часть неоднородного уравнения является константой, то в качестве первоначального варианта подбора рассматриваем, где – пока ещё неизвестный коэффициент. Поскольку в общем решении НЕТ одинокой константы, то частное решение следует искать в том же виде.

Подставим и очевидные производные в левую часть исходного уравнения:
– после упрощений приравниваем результат к правой части исходного уравнения.
Из последнего равенства следует, что – подставляем найденное значение в «заготовку»:.

Для проверки подставим и в неоднородное уравнение:

– получено верное равенство, т.е. частное решение найдено правильно.

3) Составим общее решение неоднородного уравнения:

Ответ:

б) *1) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения. Берём наш неоднородный диффур и обнуляем правую часть:*

Составим и решим характеристическое уравнение:

– получены различные действительные корни, поэтому общее решение:

2) Найдём частное решение неоднородного уравнения.
Поскольку в правой части находится многочлен 3-й степени, то в качестве первоначальной версии подбора выдвигаем, где – пока ещё неизвестные коэффициенты.

Теперь смотрим на общее решение – в нём нет ни куба «икс», ни квадрата, ни линейного члена, ни одинокой константы. Поэтому частное решение НЕ НУЖНО домножать на «икс», и мы ищем его в неизменном виде.

Найдём первую и вторую производную:

Подставим и в левую часть неоднородного уравнения, раскроем скобки:

– и приравняем результат к правой части исходного уравнения.

Теперь нужно ***приравнять коэффициенты при соответствующих степенях и составить систему линейных уравнений****. В картинках процесс выглядит так:*

Уравнения лучше записать в порядке убывания степеней, начиная с коэффициентов при кубах «икс»:

В данном случае система получилась очень простой, и многие из вас, наверное, справились с ней устно. Подставляем найденные значения в наш исходный подбор:
– частное решение неоднородного уравнения:

И сразу выполним ***проверку****, найдём:*

и подставим и в левую часть неоднородного уравнения:
– получена правая часть исходного уравнения, значит, частное решение найдено правильно.

3) Запишем общее решение неоднородного уравнения:

Ответ: *общее решение:*

Пример 48*. *Решение: *1) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:*

Составим и решим характеристическое уравнение:

, – получены различные действительные значения, которые удовлетворяют характеристическому уравнению (не забываем проверить!).

Таким образом:

2) Выполним подбор частного решения. Поскольку в правой части исходного уравнения находится экспонента, умноженная на константу, то в качестве первоначально версии подбора выдвигаем. Теперь смотрим на общее решение однородного уравнения – в нём уже есть такое слагаемое:

Поэтому первоначальную версию следует домножить на «икс» и искать частное решение в виде:
, где – пока еще неизвестный коэффициент.

Используя правило дифференцирования произведения, найдём первую и вторую производную:

Подставим, и в левую часть исходного уравнения и проведём максимальные упрощения:

– после чего приравняем результат к правой части исходного уравнения.
Из последнего равенства автоматически получаем – подставляем найденное значение в наш подбор: – искомое частное решение.

Быстренько выполним проверку, а именно найдём,
и подставим их вместе с в левую часть:

– в результате получена правая часть уравнения, что и требовалось проверить.

3) Составляем общее решение неоднородного уравнения:
, которое можно было, в принципе, сразу записать в

ответ: *общее решение:*

Пример 51*. *Решение: *найдём общее решение соответствующего однородного уравнения. Составим и решим характеристическое уравнение:*

– различные действительные корни, поэтому:

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

Примечание: *первоначальная версия подбора подлежит домножению на, так как в общем решении уже есть слагаемое.*

Найдём производные:
и подставим их в левую часть неоднородного уравнения:

– после максимальных упрощений приравниваем результат к правой части.

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях и решим систему:
– подставляем во 2-е уравнение:

Таким образом:

Общее решение неоднородного уравнения:

Найдём частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Применяем к общему решению условие:

Найдём производную:

и применим к ней начальное условие:

Составим и решим систему:
, откуда следует, что – подставляем найденные значения в общее решение
Ответ: *частное решение:*

Выполним ***проверку****. Проверим выполнение начального условия:*
– выполнено.

Найдём производную:
и проверим выполнение начального условия:
– выполнено.

Найдём вторую производную:

и подставим её вместе с в левую часть исходного уравнения:

– в результате получена правая часть исходного уравнения.

Вывод: *задание решено верно.*

Пример 53*. *Решение: *найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:*

– характеристическое уравнение имеет сопряженные, чисто мнимые комплексные корни, поэтому:.

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде:

Примечание: *первоначальная версия подлежит домножению на «икс», поскольку в общем решении уже есть такие слагаемые.*

Найдём производные:

Подставим и в левую часть неоднородного уравнения:

– приравниваем результат к правой части.

Приравниваем коэффициенты при соответствующих тригонометрических функциях:

Примечание: *– по той причине, что в правой части отсутствует синус, и формально его можно записать с нулевым коэффициентом:*

Таким образом:.
Проверка *найденного частного решения:*

Подставим и в левую часть исходного уравнения:
– в результате получена правая часть, в чём и требовалось убедиться.

Составим общее решение неоднородного уравнения:

Ответ: *общее решение:*

Пример 55*. *Решение:

а) *составим и решим характеристическое уравнение:*

, – получены два различных действительных корня и два сопряженных комплексных корня.

Ответ: *общее решение*

б) *Составим и решим характеристическое уравнение:*

, – получены пять кратных нулевых корней и действительный корень

Ответ: *общее решение*